

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 1990 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$$

を求めよ。

第 2 問

3 次関数 $h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は、次の条件 (i), (ii) をみたすものとする。

(i) $h(1) = 1$, $h(-1) = -1$ 。

(ii) 区間 $-1 < x < 1$ で極大値 1, 極小値 -1 をとる。

このとき,

(1) $h(x)$ を求めよ。

(2) 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が区間 $-1 < x < 1$ で $-1 < f(x) < 1$ をみたすとき,
 $|x| > 1$ なる任意の実数 x に対して不等式 $|f(x)| < |h(x)|$ が成立することを証明せよ。

第 3 問

V を一辺の長さが 1 の正 8 面体, すなわち xyz 空間において

$$|x| + |y| + |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

をみたす点 (x, y, z) の集合と合同な立体とする。

- (1) V の一つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さは一定であることを示せ。
- (2) 一辺の長さが 1 の正方形の穴があいた平面がある。 V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。

第 4 問

行列

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & -\frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

に対し、点列 $P_n = (x_n, y_n)$ を $P_0 = (1, 0)$, $P_n = MP_{n-1}$ により定める。

- (1) a が正の実数を動くとき、 $\triangle P_0 P_1 P_2$ の面積を最大にする a の値を求めよ。
- (2) a を (1) で求めた値とする。 $\triangle P_0 P_1 P_2, \triangle P_1 P_2 P_3, \dots, \triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ の和集合として表される図形の面積を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

第 5 問

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を考える。楕円上の任意の点 P に対し、 P を一つの頂点とし、単位円に外接し、楕円に内接する平行四辺形が存在するための a, b の必要十分条件を求めよ。

第 6 問

1 から 6 までの目が等確率で出るサイコロをくり返し振り，出た目を順に小数第 1 位，第 2 位， $\dots$ として 0 以上 1 未満の小数を作る。

- (1) 作った小数が $41/333$ 以下である確率の極限を求めよ。
- (2) 実数 α に対し，作った小数が α 以下である確率の極限が $1/2$ となる α の範囲を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)