

東京大学 1990 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$$

を求めよ。

【方針】

まず a_n は下から $\sqrt{n}$ で押さえれば無限大に発散する。比の極限は、 $2k+1$ を $2k$ と $2k+2$ の間に挟み、 b_n を a_n に近い和で上下から評価する。最後に、1 項ずらした和と a_n の比が 1 に近づくことを示してはさみうちを使う。

【解答】

まず $1 \leq k \leq n$ では $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ である。したがって $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ である。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ である。

次に b_n/a_n を考える。各 $k \geq 1$ について $2k < 2k+1 < 2k+2$ であるから $\frac{1}{\sqrt{2k+2}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k}}$ である。これを $k = 1, 2, \dots, n$ について足すと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}} < b_n < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

すなわち $\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{n+1} - 1) < b_n < \frac{1}{\sqrt{2}}a_n$ である。

両辺を a_n で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a_{n+1} - 1}{a_n} < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。ここで $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ だから $\frac{a_{n+1} - 1}{a_n} = 1 + \frac{1/\sqrt{n+1} - 1}{a_n}$ である。すでに $a_n \rightarrow \infty$ が分かっているので、右辺は 1 に近づく。したがってはさみうちにより $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。別解。積分比較で大きさを直接見ることもできる。関数 $1/\sqrt{x}$ は正で減少するので

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq a_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

である。すなわち $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq a_n \leq 1 + 2(\sqrt{n} - 1)$ だから、 a_n は無限大に発散し、さらに $a_n/(2\sqrt{n})$ は 1 に近づく。同様に、関数 $1/\sqrt{2x+1}$ も正で減少するので

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \leq b_n \leq \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$$

である。両端はいずれも n が大きいとき $\sqrt{2n}$ と同じ大きさになるため、 $b_n/\sqrt{2n}$ は 1 に近づく。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{2n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

という見方でも同じ結論を得る。

【総評】 難度は 10 段階中 4、計算量は 10 段階中 3。発散は下から $\sqrt{n}$ で押さえれば十分である。比の極限では、各項を単に似ていると言うのではなく、 $2k$ 、 $2k+1$ 、 $2k+2$ の大小で上下評価を作るのが安全である。試験場では 10 分以内に取り切りたい基本問題である。

【第 2 問】

3 次関数 $h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は、次の条件 (i), (ii) をみたすものとする。

- (i) $h(1) = 1, h(-1) = -1$ 。
- (ii) 区間 $-1 < x < 1$ で極大値 1, 極小値 -1 をとる。

このとき、

- (1) $h(x)$ を求めよ。
- (2) 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が区間 $-1 < x < 1$ で $-1 < f(x) < 1$ をみたすとき、 $|x| > 1$ なる任意の実数 x に対して不等式 $|f(x)| < |h(x)|$ が成立することを証明せよ。

【方針】

(1) は 3 次関数が端点と内部の極値で $-1, 1, -1, 1$ を交互にとることから、4 点を通る 3 次式として決める。(2) は節点 $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ での 3 次補間表示を用いる。 $x > 1$ では各基本式の符号が交互になり、 $h - f$ と $h + f$ の節点値の符号とそうするため、 $-h(x) < f(x) < h(x)$ が従う。 $x < -1$ は左右を反転して同様に処理する。

【解答】

(1) 極大値を 1 とする点を u 、極小値を -1 とする点を v とする。3 次関数で、端点条件が $h(-1) = -1, h(1) = 1$ であることから、極大点は極小点より左にあり、 $-1 < u < v < 1$ である。 $h(x) - 1$ は $x = 1$ を根にもち、さらに極大点 u では $h(u) = 1, h'(u) = 0$ だから $x = u$ を重解にもつ。したがって、ある定数 A を用いて $h(x) - 1 = A(x - u)^2(x - 1)$ と書ける。同様に、 $h(x) + 1$ は $x = -1$ を根にもち、極小点 v で重解をもつので $h(x) + 1 = A(x - v)^2(x + 1)$ である。両式の最高次係数は同じなので、定数は同じ A でよい。

2 式を引くと $-2 = A\{(x - u)^2(x - 1) - (x - v)^2(x + 1)\}$ である。右辺の braces の中を展開すると、 x^2 の係数は $-2u + 2v - 2$ 、 x の係数は $u^2 + 2u - v^2 + 2v$ である。左辺は定数なので $-2u + 2v - 2 = 0, u^2 + 2u - v^2 + 2v = 0$ が必要である。第 1 式から $v = u + 1$ であり、これを第 2 式へ代入すると $u = -\frac{1}{2}, v = \frac{1}{2}$ を得る。

このとき $(x - u)^2(x - 1) - (x - v)^2(x + 1) = -\frac{1}{2}$ なので、 $-2 = A(-\frac{1}{2})$ より $A = 4$ である。したがって $h(x) - 1 = 4(x + \frac{1}{2})^2(x - 1)$ となり、展開して $h(x) = 4x^3 - 3x$ である。(2) まず $x > 1$ とする。4 つの節点 $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ を用いる。3 次関数はこの 4 点での値によって一意に決まるので、任意の 3 次式はこれらの点での値を使って表せる。 $x > 1$ における 4 つの基本式の符号は、左から順に $-, +, -, +$ である。

一方、 h の節点での値は $-1, 1, -1, 1$ である。また、条件 $-1 < f(x) < 1$ が $-1 < x < 1$ で成り立つので、連続性から端点でも $-1 \leq f(-1) \leq 1, -1 \leq f(1) \leq 1$ である。したがって、各節点における $h - f$ の符号は、上の基本式の符号と同じ向きになる。特に内部の 2 点 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ では不等号は厳密であるから、補間表示により $h(x) - f(x) > 0$ である。

同じように $h + f$ を見ると、各節点における $h + f$ の符号も基本式の符号と同じ向きになる。内部の 2 点で厳密なので $h(x) + f(x) > 0$ である。よって $x > 1$ では $-h(x) < f(x) < h(x)$ が成り立つ。ここで $h(x) > 0$ であるから $|f(x)| < |h(x)|$ である。 $x < -1$ の場合は、 $F(X) = -f(-X)$ とおけば、 F も区間 $-1, 1$ で $-1, 1$ の間に入る 3 次関数である。上で示した $X > 1$ の結果を F に適用し、 $X = -x$ と戻せば $|f(x)| < |h(x)|$ が従う。したがって $|x| > 1$ の任意の実数 x で不等式が成り立つ。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。(1) の形は有名な 3 倍角型だが、極値の位置と値を確認して条件を満たすことを示す必要がある。(2) は節点での符号と 3 次補間を使う証明で、言葉だけでは弱い。試験場では 25 分程度を見込み、 $h - f$ と $h + f$ の両方を調べて絶対値不等式へつなげたい。

【第 3 問】

V を一辺の長さが 1 の正 8 面体, すなわち xyz 空間において

$$|x| + |y| + |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

をみたす点 (x, y, z) の集合と合同な立体とする。

- (1) V の一つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さは一定であることを示せ。
- (2) 一辺の長さが 1 の正方形の穴があいた平面がある。 V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。

【方針】

(1) は正 8 面体を標準形 $|x| + |y| + |z| \leq 1/\sqrt{2}$ に置き、1 つの面に平行な切断面を $x + y + z = t$ として調べる。切り口の辺は 3 方向に分かれ、各方向の長さの和がもとの正 8 面体の一辺 1 に等しいことを示せば周長は一定になる。(2) は通過方向に垂直な平面への投影が一辺 1 の正方形の内部に入る具体的な向きを作ればよい。

【解答】

(1) 正 8 面体を $|x| + |y| + |z| \leq R$, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ として考える。この正 8 面体の一つの面は、例えば $x + y + z = R$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 上にある。したがって、この面に平行な平面は $x + y + z = t$ ($-R \leq t \leq R$) と書ける。他の面に平行な場合も、座標の符号を替えれば同じ議論である。

切り口の辺は、正 8 面体の辺に平行な 3 方向、すなわち $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$ に平行な方向に分かれる。 $0 \leq t \leq R$ としてよい。切り口が端に近づくとき一部の辺は長さ 0 に退化するが、各方向について互いに平行な 2 本の辺の長さの和は常に正 8 面体の一辺の長さに等しい。実際、例えば $x - y$ 方向の 2 本は、平面 $x + y + z = t$ が、もとの面とそれに対向する面の間を平行に動くことで、一方が短くなる分だけ他方が長くなる。両端ではそれぞれ長さが 1 と 0 になり、途中ではその和が変わらない。

同じことが 3 方向すべてで成り立つので、切り口の周の長さは $1 + 1 + 1 = 3$ で一定である。

(2) 通過できることを、具体的な向きを作って示す。穴の平面内に、互いに直交する単位ベクトル $u = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$, $v = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ の方向をとる。実際 $|u| = |v| = 1$, $u \cdot v = 0$ である。

正 8 面体の 6 個の頂点は $(\pm R, 0, 0)$, $(0, \pm R, 0)$, $(0, 0, \pm R)$ である。これらを穴の平面に投影し、平面内の座標を u 方向、 v 方向で測ると、 u 方向の幅は

$$2R \max \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。同様に、 v 方向の幅も $2R \max \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

ここで $\frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$ である。したがって、この向きで見た正 8 面体の投影は、一辺 1 の正方形の内部に入る。よって、その投影方向に沿って動かせば、平面にふれることなく正方形の穴を通過させることができる。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。(1) は切り口そのものの形が三角形から六角形へ変わっても、3 方向の辺長の和が変わらないことを押さえる問題である。(2) は「入りそう」という直感ではなく、投影の横幅と縦幅がどちらも 1 未満になる具体的な直交 2 方向を示す必要がある。試験場では 20 分程度で、通過方向を面に垂直に固定しない柔軟さが鍵になる。

【第 4 問】

行列

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & -\frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

に対し、点列 $P_n = (x_n, y_n)$ を $P_0 = (1, 0)$, $P_n = MP_{n-1}$ により定める。

- (1) a が正の実数を動くとき、 $\triangle P_0 P_1 P_2$ の面積を最大にする a の値を求めよ。
- (2) a を (1) で求めた値とする。 $\triangle P_0 P_1 P_2, \triangle P_1 P_2 P_3, \dots, \triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ の和集合として表される図形の面積を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

【方針】

行列 M は、平面上の点を複素数で見ると、一定の倍率で縮小しながら一定角だけ回転する操作である。 P_n は等比的に並ぶので、(1) は $1, \lambda, \lambda^2$ の三角形の面積を a の式にして最大化する。(2) は $a = \sqrt{3}$ のとき相似比が $\frac{1}{2}$ 、回転角が 60 度になり、各三角形の面積が公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列になることを使う。

【解答】

(1) 点 (x, y) を複素数 $z = x + yi$ と見る。行列 M による変換は $z \mapsto \lambda z$, $\lambda = \frac{1+ai}{1+a^2}$ で表される。したがって $P_0 = 1$, $P_1 = \lambda$, $P_2 = \lambda^2$ である。

三角形 $P_0 P_1 P_2$ の面積は

$$\frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}\{(\lambda - 1)\overline{(\lambda^2 - 1)}\} \right|$$

で求められる。これを計算すると $[\triangle P_0 P_1 P_2] = \frac{a^3}{2(1+a^2)^2}$ である。

よって $F(a) = \frac{a^3}{2(1+a^2)^2}$ ($a > 0$) の最大を求めればよい。微分すると $F'(a) = \frac{a^2(3-a^2)}{2(1+a^2)^3}$ である。したがって $0 < a < \sqrt{3}$ で増加し、 $a > \sqrt{3}$ で減少するので、最大となるのは $a = \sqrt{3}$ である。

(2) $a = \sqrt{3}$ のとき

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

である。つまり、各点は前の点を原点のまわりに 60 度回転し、さらに長さを $\frac{1}{2}$ 倍した位置にある。

したがって三角形 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ は、 $\triangle P_0 P_1 P_2$ を相似比 $(\frac{1}{2})^n$ で縮小し、回転したものである。面積比はその 2 乗なので、各三角形の面積は

$$[\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}] = [\triangle P_0 P_1 P_2] \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

である。隣り合う三角形は辺を共有するだけで内部は重ならず、全体は原点へ向かって巻くように並ぶ。

(1) での最大面積は $[\triangle P_0 P_1 P_2] = \frac{(\sqrt{3})^3}{2(1+3)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{32}$ である。よって

$$S_n = \frac{3\sqrt{3}}{32} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right)$$

である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。行列を複素数の掛け算として読むと、点列の構造が大きく簡単になる。

(1) は面積公式の計算、(2) は面積比が長さ比の 2 乗になることが要点である。試験場では 18 分程度で、 $a = \sqrt{3}$ のときの λ を極形式で書くと後半の等比和が見えやすい。

【第 5 問】

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を考える。楕円上の任意の点 P に対し、 P を一つの頂点とし、単位円に外接し、楕円に内接する平行四辺形が存在するための a, b の必要十分条件を求めよ。

【方針】

楕円も単位円も中心が原点なので、楕円に内接する平行四辺形は中心を原点にもつ形として考えられる。頂点を $\pm P, \pm Q$ とおき、単位円に外接するためには、原点から 2 種類の辺への距離がともに 1 になる必要がある。これにより $P \cdot Q = 0$ が必要となるので、 Q を P に垂直な方向に置き、楕円上の条件と内接円半径を計算する。

【解答】

楕円と単位円はいずれも原点を中心として対称である。楕円に内接する平行四辺形は、その対角線の中点が楕円の中心、すなわち原点になる。したがって、4 頂点を $\pm P, \pm Q$ とおいてよい。

単位円がこの平行四辺形に外接する、すなわち平行四辺形が単位円に接するには、原点から 4 辺までの距離がすべて 1 でなければならない。辺 PQ と辺 $P, -Q$ への距離はそれぞれ $\frac{|P_x Q_y - P_y Q_x|}{|P - Q|}$, $\frac{|P_x Q_y - P_y Q_x|}{|P + Q|}$ である。これらが等しいためには $|P - Q| = |P + Q|$ であり、これは $P \cdot Q = 0$ と同値である。

そこで $P = (x, y)$ を楕円上の任意の点とし、 Q を P に垂直な方向に $Q = t(-y, x)$ とおく。 Q も楕円上にある条件は $t^2 \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) = 1$ である。

このとき平行四辺形の内接円の半径を ρ とすると、直角条件 $P \cdot Q = 0$ により $\rho^2 = \frac{|P|^2 |Q|^2}{|P|^2 + |Q|^2}$ である。ここで P が楕円上にあるので $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ である。上の Q の条件と合わせて整理すると、 x, y によらず $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ となる。

単位円に外接するためには $\rho = 1$ が必要十分である。したがって求める条件は $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 1$ であり、同値に $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ である。

この条件が成り立てば、任意の楕円上の点 P に対して上の方法で Q を取ることができ、作った平行四辺形は楕円に内接し、単位円に外接する。逆に、そのような平行四辺形が任意の P で存在するなら、特に上で得た半径が 1 でなければならないので同じ条件が必要である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。中心対称な楕円に内接する平行四辺形を $\pm P, \pm Q$ と置けるかが第一関門である。単位円に接する条件は、辺までの距離を比較して $P \cdot Q = 0$ を導くと自然に進む。試験場では 25 分程度で、最後に必要性和十分性の両方を明記したい。

【第 6 問】

1 から 6 までの目が等確率で出るサイコロをくり返し振り、出た目を順に小数第 1 位, 第 2 位, $\dots$ として 0 以上 1 未満の小数を作る。

- (1) 作った小数が $41/333$ 以下である確率の極限を求めよ。
- (2) 実数 α に対し, 作った小数が α 以下である確率の極限が $1/2$ となる α の範囲を求めよ。

【方針】

作られる小数は、各桁が 1 から 6 のいずれかに限られる。大小比較は通常的小数と同じく、初めて異なる桁で決まる。(1) は $41/333 = 0.\overline{123}$ と見て、3 桁ずつ比較する。同じ 3 桁 123 が出た場合だけ同じ問題が繰り返される。(2) は分布が階段状になることを使い、確率がちょうど $\frac{1}{2}$ になるのは、先頭の桁が 1,2,3 である全場合を含み、先頭が 4 である全場合を含まない境界の間であると調べる。

【解答】

(1) まず $\frac{41}{333} = 0.\overline{123}$ である。作られる小数をこの数と比べると、先頭の 3 桁を 123 と比較する。

先頭 3 桁が 123 より小さくなるのは、次の場合である。

第 1 桁は 1 でなければならない。第 2 桁が 1 なら、その時点で $12\cdots$ より小さいので成功である。この確率は $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ である。

第 1 桁、第 2 桁がそれぞれ 1,2 で、第 3 桁が 1 または 2 なら成功である。この確率は $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{108}$ である。したがって、先頭 3 桁で成功が確定する確率は $\frac{1}{36} + \frac{1}{108} = \frac{1}{27}$ である。

一方、先頭 3 桁がちょうど 123 である確率は $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ であり、この場合だけ、4 桁目以降について同じ比較が残る。求める極限の確率を p とすると $p = \frac{1}{27} + \frac{1}{216}p$ である。よって $(1 - \frac{1}{216})p = \frac{1}{27}$ となり、 $p = \frac{8}{215}$ である。

(2) 作られる小数の第 1 桁は 1 から 6 まで等確率である。第 1 桁が 1,2,3 である確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。したがって、確率が $\frac{1}{2}$ となる境界は、「第 1 桁が 1,2,3 のものをすべて含み、第 1 桁が 4 のものをまだ含まない」範囲にある。

第 1 桁が 3 である小数のうち最大のものは、以後の桁をすべて 6 にした $0.3666\cdots = \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \cdots$ である。これは

$$\frac{3}{10} + \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + \frac{1}{15} = \frac{11}{30}$$

である。

また、第 1 桁が 4 である小数のうち最小のものは、以後の桁をすべて 1 にした $0.4111\cdots = \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$ である。これは

$$\frac{4}{10} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{1}{90} = \frac{37}{90}$$

である。

よって $\frac{11}{30} \leq \alpha \leq \frac{37}{90}$ なら、第 1 桁が 1,2,3 である場合はすべて α 以下であり、第 1 桁が 5,6 である場合はすべて α より大きい。第 1 桁が 4 で、ちょうど最小の列になるような特定の並びは、有限回までで見る確率が限りなく 0 になるので、極限の確率には影響しない。したがって極限は $\frac{1}{2}$ である。

逆に、 $\alpha < \frac{11}{30}$ なら、第 1 桁が 3 であっても α を超える並びが正の確率で残るので、確率は $\frac{1}{2}$ より小さい。 $\alpha > \frac{37}{90}$ なら、第 1 桁が 4 であっても α 以下になる並びが正の確率で加わるので、確率は $\frac{1}{2}$ より大きい。したがって求める範囲は $\frac{11}{30} \leq \alpha \leq \frac{37}{90}$ である。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。普通の十進小数だが、使える数字が 1 から 6 に限られているため、大小比較を桁ごとの場合分けに落とす必要がある。(1) は 3 桁周期 123 の一致だけが再帰する点、(2) は先頭桁が 3 の最大値と 4 の最小値を境界にする点が要点である。試験場では 25 分程度を見込み、端点を含める理由まで書きたい。