

東京大学 1991 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

- (1) $x > 0$ において、関数 $\frac{\log x}{x}$ の増減を調べよ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数である。
 (2) 正整数 a, b の組で、 $a^b = b^a$ かつ $a \neq b$ を満たすものをすべて求めよ。
 (3) $3^x = x^3$ を満たす正の有理数は、3 以外には存在しないことを示せ。

【方針】

(1) で $\log x/x$ の単調性を確定する。(2) は整数の小さい側を 1, 2 に絞る。(3) は有理数を既約分数にして素因数を比較し、まず分母が 1、次に整数が 3 の幂であることを導く。

【解答】

(1)

$$\left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

従って $0 < x < e$ で増加し、 $x > e$ で減少する。

(2) $a < b$ としてよい。条件は

$$\frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b}.$$

$a \geq 3$ なら両者は減少区間にあり等しくならない。 $a = 1$ も不可能である。 $a = 2$ のとき、 $b \geq 3$ では関数は減少し、 $b = 4$ で

$$2^4 = 4^2$$

が成り立つのでこれだけである。順序も含めて

$$(a, b) = (2, 4), (4, 2).$$

(3) $x = m/n$ を互いに素な正整数 m, n で表す。 $3^{m/n} = (m/n)^3$ より

$$3^m n^{3n} = m^{3n}.$$

n の素因数は右辺に現れないので $n = 1$ 。従って $x = m$ は整数である。さらに等式から m の素因数は 3 だけなので $m = 3^k$ と書ける。すると

$$3^k = 3k.$$

$k = 1$ は解であり、 $k \geq 2$ では $3^k > 3k$ だから解でない。従って正の有理数解は

$$x = 3$$

だけである。

【総評】 対数関数の単調性と素因数分解を連結する難問で目安は 20 分。(3) では実数グラフだけでは有理数を排除できないため、既約分数の分母から先に消す。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 2 問】

平面上に 3 つの円 C_1, C_2, C_3 があって、 C_1 と C_2 は異なる 2 点 A, B で交わり、 C_3 は C_1 および C_2 と互いに直交している。ただし、2 つの円が互いに直交しているとは、2 つの円に共通点があって、各共通点におけるそれぞれの円に対する接線がその共通点で直交しているときをいう。

- (1) 円 C_3 の中心は、2 点 A, B を通る直線上にあることを示せ。
 (2) 2 点 A, B の一方は円 C_3 の内側に、他方は円 C_3 の外側にあることを示せ。

【方針】

円の直交条件を中心間距離の平方で表す。(1) は 2 円に対する式の差から根軸 AB を得る。(2) は AB を座標軸にして中心と半径の関係を求め、 A, B の円に対する方べきの符号を比較する。

【解答】

C_i の中心、半径を O_i, r_i とする。2 円が直交する条件は

$$O_i O_j^2 = r_i^2 + r_j^2$$

である。

- (1) $i = 1, 2$ の式を引くと

$$O_1 O_3^2 - r_1^2 = O_2 O_3^2 - r_2^2.$$

両辺は点 O_3 の C_1, C_2 に対する方べきであり、これらが等しい点の軌跡は共通弦 AB を含む直線である。従って O_3 は直線 AB 上にある。

- (2) AB の中点を原点とし

$$A = (-c, 0), \quad B = (c, 0) \quad (c > 0)$$

と置く。 C_1, C_2 の中心は AB の垂直二等分線上にあるから $O_i = (0, u_i)$ 、半径は

$$r_i^2 = c^2 + u_i^2.$$

- (1) より $O_3 = (s, 0)$ と置ける。直交条件から

$$s^2 + u_i^2 = r_3^2 + c^2 + u_i^2,$$

従って

$$r_3^2 = s^2 - c^2 > 0.$$

点 A, B の C_3 に対する方べきはそれぞれ

$$(s + c)^2 - r_3^2 = 2c(s + c),$$

$$(s - c)^2 - r_3^2 = 2c(c - s).$$

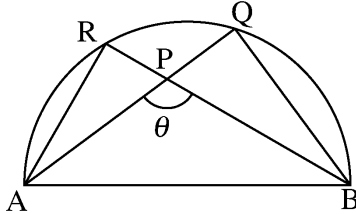
$|s| > c$ なので 2 つの符号は反対である。よって一方は C_3 の内側、他方は外側にある。

【総評】 直交円の中心条件を方べきへ変換する難問で目安は 20 分。中心が根軸上にあることと、半径が実数であるため $|s| > c$ となることを使う。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 3 問】

xy 平面上の長さ 2 の線分 AB を直径とする半円を D とする. 半円 D の内部 (周を含まない) の一点を P とする. A と P を通る直線と半円 D の円弧の部分との交点を Q とし, B と P を通る直線と半円 D の円弧の部分との交点を R とする. 五角形 $ARPQB$ の面積を S とおく.

- (1) $\angle APB$ を一定に保ったまま点 P が半円 D の内部を動くとき, S のとる値の範囲を, $\angle APB = \theta$ を使って表せ.
- (2) 点 P が, 半円 D の内部を自由に動くとき, S のとる値の範囲を求めよ.



【方針】

$m = AP, n = BP, u = mn$ と置く. 点 P の円に対する方べきから PQ, PR を消去し, 五角形を 3 三角形に分けて面積を u, θ の一次式にする. 固定角での u の範囲を三角形の辺条件から求め, 最後に角度も動かして最大化する.

【解答】

$m = AP, n = BP, u = mn, c = \cos \theta$ とおく. 点 P は半円内部なので

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \quad c < 0.$$

余弦定理より

$$m^2 + n^2 = 4 + 2uc. \quad (1)$$

円の中心を O とすると中線の公式から

$$1 - OP^2 = -uc.$$

点 P の方べきより

$$m \cdot PQ = n \cdot PR = -uc. \quad (2)$$

五角形を三角形 PAB, PAR, PQB に分けると, (1), (2) から

$$S = \frac{1}{2} \sin \theta \{u - (m^2 + n^2)c\} = \frac{1}{2} \sin \theta \{u(1 - 2c^2) - 4c\}. \quad (3)$$

また

$$(m - n)^2 = 4 - 2u(1 - c) \geq 0$$

だから

$$0 < u \leq \frac{2}{1 - c}. \quad (4)$$

上端は $m = n$ のときにとり, 下端 0 は P が A または B へ近づく極限で, とらない.

(1) $1 - 2c^2 \geq 0$, すなわち $\pi/2 < \theta \leq 3\pi/4$ では S は u とともに増加する. 従って

$$-\sin 2\theta < S \leq \frac{\sin \theta(1 - 2\cos \theta)}{1 - \cos \theta} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}\right).$$

$\theta = 3\pi/4$ では $S = 1$ である.

$3\pi/4 < \theta < \pi$ では S は u とともに減少するので

$$\frac{\sin \theta(1 - 2\cos \theta)}{1 - \cos \theta} \leq S < -\sin 2\theta.$$

(2) 後半の角度範囲では $-\sin 2\theta \leq 1$ である. 前半で $z = -\cos \theta$ とおくと, 上端は

$$M(z) = \frac{\sqrt{1 - z^2}(1 + 2z)}{1 + z} \quad \left(0 < z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

微分すると最大は

$$z = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

で生じ、

$$M_{\max} = \sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

一方 S は P を端点へ近づけることで 0 へ近づくが、内部点なので 0 にはならない。従って全体の範囲は

$$0 < S \leq \sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

【総評】 固定角と自由角の二段階で面積範囲を求める最難関級問題で目安は 30 分。積 $AP \cdot BP$ の上端だけが達成され、下端 0 は達成されないことを不等号へ反映する。