

入 学 試 験 問 題



数 学

東 京 大 学 1991 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

平面上に正四面体が置いてある。平面と接している面の 3 辺のひとつを任意に選び、これを軸として正四面体をたおす。 n 回の操作の後に、最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を求めよ。

第 2 問

a, b, c を正の実数とする。 xyz 空間において、 $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $z = c$ をみたす点 (x, y, z) からなる板 R を考える。点光源 P が平面 $z = c + 1$ 上の楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c + 1$$

の上を一周するとき、光が板 R にさえぎられて xy 平面上にできる影の通過する部分の図をえがき、その面積を求めよ。

第 3 問

定数 p に対して，3 次方程式

$$x^3 - 3x - p = 0$$

の実数解の中で最大のものと最小のものとの積を $f(p)$ とする。ただし，実数解がただひとつのときには，その 2 乗を $f(p)$ とする。

(1) p がすべての実数を動くとき， $f(p)$ の最小値を求めよ。

(2) p の関数 $f(p)$ のグラフの概形をえがけ。

第 4 問

(1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, ある多項式 $p_n(x), q_n(x)$ が存在して,

$$\sin n\theta = p_n(\tan \theta) \cos^n \theta, \quad \cos n\theta = q_n(\tan \theta) \cos^n \theta$$

と書けることを示せ。

(2) このとき, $n > 1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ。

$$p_n'(x) = nq_{n-1}(x), \quad q_n'(x) = -np_{n-1}(x)$$

第 5 問

xy 平面上, x 座標, y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ。

各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており, 傾き $2/5$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

第 6 問

$f(x)$ は $x > 0$ で定義された連続な関数で、 $0 < x_1 < x_2$ ならば、つねに $f(x_1) > f(x_2) > 0$ であるものとし、

$$S(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

とおく。このとき、 $S(1) = 1$ であり、さらに任意の $a > 0$ に対して、原点と点 $(a, f(a))$ 、原点と点 $(2a, f(2a))$ を結ぶ 2 直線と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(a)$ に等しいものとする。

(1) $S(x)$ 、 $f(x) - 2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ。

(2) $x > 0$ に対して、

$$a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f(2^n x)$$

とおく。積分

$$\int_x^{2x} a(t) dt$$

の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ を決定せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)