東京大学 1991 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上に正四面体が置いてある。平面と接している面の 3 辺のひとつを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす。n 回の操作の後に，最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を求めよ。

【方針】
接している面そのものを状態と見る。正四面体には 4 つの面があり、現在接している面の 3 辺のどれを軸に倒しても、次に接するのは現在の面以外の 3 面のいずれかである。したがって「最初の面 A にいる確率」だけでなく、A 以外にいるとき次に A へ戻る確率が $1/3$ であることを使って 1 次漸化式を立てる。初期値 $p_0 = 1$ から解く。

【解答】
最初に平面と接していた面を A とする。n 回の操作の後に面 A が平面と接している確率を p_n とおく。

正四面体には 4 つの面がある。現在ある面が平面と接しているとき、その面の 3 辺のうち 1 つを軸に倒すと、次に接する面は現在の面に隣り合う 3 面のうち 1 つである。したがって、現在 A が接しているなら、次の操作後には A は接していない。一方、現在 A 以外の面が接しているなら、次に A が接する確率は $1/3$ である。

よって $p_{n+1} = 0 \cdot p_n + \dfrac{1}{3}(1 - p_n) = \dfrac{1 - p_n}{3}$ である。この漸化式を定数解 $p = 1/4$ からのずれで書くと $p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$ となる。

初めは面 A が接しているので $p_0 = 1$ である。したがって

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

よって求める確率は $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

【総評】 正四面体の倒れ方を 4 面間の遷移として見る確率問題である。目安時間は 10 分。面 A か否かの 2 状態にまとめてよいが、A 以外の状態から A に戻る確率が常に $1/3$ である理由を、正四面体の 3 辺の選択に結びつけて書く必要がある。漸化式は定数解 $1/4$ からのずれで処理すると、符号の交替も自然に出る。

【第 2 問】

a, b, c を正の実数とする。xyz 空間において，$|x| \leqq a$，$|y| \leqq b$，$z = c$ をみたす点 (x, y, z) からなる板 R を考える。点光源 P が平面 $z = c + 1$ 上の楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = c + 1$$

の上を一周するとき，光が板 R にさえぎられて xy 平面上にできる影の通過する部分の図をえがき，その面積を求めよ。

【方針】
点光源を $(a\cos\theta, b\sin\theta, c+1)$、板上の点を (u, v, c) と置き、直線が xy 平面に当たる点を求める。座標を $X = x/a$、$Y = y/b$ に縮尺変更すると、影は「中心が半径 c の円を動く、半幅 $c + 1$ の正方形」の通過領域になる。これは正方形を半径 c だけ外側へふくらませた図形なので、面積は正方形の面積、4 辺に沿う長方形部分、4 隅の四分円部分に分けて求める。最後に縮尺の面積倍率 ab を掛ける。

【解答】
点光源を $P = (a\cos\theta, b\sin\theta, c+1)$ とし、板 R 上の点を (u, v, c), $|u| \leqq a$, $|v| \leqq b$ とおく。この 2 点を結ぶ直線上の点は、実数 s を用いて $P + s\{(u, v, c) - P\}$ と表される。z 座標は $c + 1 + s(c - (c+1)) = c + 1 - s$ なので、xy 平面上では $s = c + 1$ である。したがって影の点を (x, y) とすると $x = (c+1)u - ca\cos\theta$, $y = (c+1)v - cb\sin\theta$ である。

固定した θ に対して、これは中心 $(-ca\cos\theta, -cb\sin\theta)$ をもち、横の半幅 $(c+1)a$、縦の半幅 $(c+1)b$ の長方形である。

Evolton evolton.jp

ここで $X=\dfrac{x}{a},\qquad Y=\dfrac{y}{b}$ とおく。この縮尺変更のもとで、長方形は半幅 $c+1$ の正方形になり、その中心は $(-c\cos\theta,-c\sin\theta)$ である。したがって中心は円 $X^2+Y^2=c^2$ 上を動く。

よって XY 平面で影の通過する部分は、正方形 $|X|\leqq c+1,\qquad |Y|\leqq c+1$ を半径 c だけ外側にふくらませた図形である。図では、1 辺 $2(c+1)$ の正方形の 4 辺の外側に幅 c の帯を付け、4 隅を半径 c の四分円で丸めた形になる。

その面積は $\{2(c+1)\}^2+4\cdot\{2(c+1)\cdot c\}+4\cdot\dfrac{\pi c^2}{4}$ であるから $4(c+1)^2+8c(c+1)+\pi c^2$ である。元の xy 平面では、X,Y から x,y への面積倍率が ab なので、求める面積は $ab\{4(c+1)^2+8c(c+1)+\pi c^2\}$ である。

【総評】 投影でできる影を、動く長方形の通過領域として読む問題である。目安時間は 18 分。点光源から板上の点を通って xy 平面に届く点を式で出すと、中心だけが楕円上を動く長方形になる。$x/a, y/b$ の縮尺変更で楕円を円に直すのが決定的で、その後は「正方形を円でふくらませた面積」として、正方形・帯・四分円に分けて数える。図示では 4 隅が丸い正方形になることを明確にする。

【第 3 問】

定数 p に対して，3 次方程式

$$x^3-3x-p=0$$

の実数解の中で最大のものと最小のものとの積を $f(p)$ とする。ただし，実数解がただひとつのときには，その 2 乗を $f(p)$ とする。

(1) p がすべての実数を動くとき，$f(p)$ の最小値を求めよ。

(2) p の関数 $f(p)$ のグラフの概形をえがけ。

【方針】

方程式を $p=x^3-3x$ と見て、曲線 $y=x^3-3x$ と水平線 $y=p$ の交点を調べる。$|p|\leqq 2$ では 3 実数解を $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ とし、解と係数の関係から最大根と最小根の積を中間根 β で $\alpha\gamma=\beta^2-3$ と表す。$|p|>2$ では実数解は 1 つだけなので、その解 u をパラメータにして $f(p)=u^2$ を描く。端 $p=\pm 2$ では値と片側から近づく枝がずれることに注意する。

【解答】

(1) $h(x)=x^3-3x$ とおく。微分すると $h'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ である。したがって $h(x)$ は $(-\infty,-1)$ で増加、$(-1,1)$ で減少、$(1,\infty)$ で増加する。また $h(-1)=2,\qquad h(1)=-2$ である。

よって $|p|<2$ では 3 つの異なる実数解をもち、$p=\pm 2$ では重解を含む実数解をもつ。3 つの実数解を、重解を含めて $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ と書く。解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=0,\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$ である。最大の解と最小の解の積は $\alpha\gamma$ である。$\alpha+\gamma=-\beta$ なので $-3=\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma=-\beta^2+\alpha\gamma$ となり $f(p)=\alpha\gamma=\beta^2-3$ を得る。

このとき中間の解 β は $-1\leqq\beta\leqq 1$ を動く。したがって $-3\leqq\beta^2-3\leqq -2$ である。特に最小値は $\beta=0$ のとき、すなわち $p=0$ のときに -3 となる。

一方、$|p|>2$ では実数解はただ 1 つである。その解を u とすると、$p>2$ では $u>2$、$p<-2$ では $u<-2$ である。よってこの場合 $f(p)=u^2>4$ となり、全体の最小値にはならない。以上より、求める最小値は -3 である。

(2) まず $-2\leqq p\leqq 2$ の部分を描く。中間の解を t とおくと $-1\leqq t\leqq 1,\qquad p=t^3-3t,\qquad f(p)=t^2-3$ である。t が -1 から 1 まで動くと、$p=t^3-3t$ は 2 から -2 まで単調に減少する。したがってこの部分は $(-2,-2),\qquad (0,-3),\qquad (2,-2)$ を通る下側の曲線である。

次に $p>2$ の部分では、ただ 1 つの実数解 $u>2$ を用いて $p=u^3-3u,\qquad f(p)=u^2$ と表される。$u\to 2+$ のとき $p\to 2+,\qquad f(p)\to 4$ であり、$u\to\infty$ では $p\to\infty$、$f(p)\to\infty$ である。

同様に $p<-2$ の部分では $u<-2$ を用いて $p=u^3-3u,\qquad f(p)=u^2$ で表される。$u\to -2-$ のとき $p\to -2-,\qquad f(p)\to 4$ であり、$u\to-\infty$ では $p\to-\infty$、$f(p)\to\infty$ である。

また、方程式は x を $-x$ に替えると p の符号が反対になるので、$f(p)$ のグラフは y 軸対称である。

したがってグラフは、$-2\leqq p\leqq 2$ で $(-2,-2),(0,-3),(2,-2)$ を通る下側の曲線を持ち、$p>2$、$p<-2$ では $f>4$ の上側の 2 枝を持つ。$p=\pm 2$ での関数値は -2 であるが、外側の枝は 4 に近づくので、そこで不連続になる。

【総評】 3 次方程式の実根を、曲線 $y=x^3-3x$ と水平線の交点として整理する問題である。目安時間は 20 分。3 実根のときに根を全部求めようとせず、中間根 β で $\alpha\gamma=\beta^2-3$ と表すのが要点である。グラフでは $p=\pm 2$ の値が -2 である一方、外側の 1 実根枝は 4 に近づくため、端点の不連続を描き落としやすい。

【第 4 問】

(1) 自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して，ある多項式 $p_n(x), q_n(x)$ が存在して，

$$\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \qquad \cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と書けることを示せ。

(2) このとき，$n>1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ。

$$p_n{}'(x) = nq_{n-1}(x), \qquad q_n{}'(x) = -np_{n-1}(x)$$

【方針】
主解では、虚数単位 i を用いて $q_n(x)+ip_n(x)=(1+ix)^n$ と定める。二項定理により実部・虚部はいずれも x の多項式であり、$x=\tan\theta$ とすれば $\cos\theta+i\sin\theta=(1+i\tan\theta)\cos\theta$ から (1) が出る。(2) はこの多項式恒等式を x で微分し、実部と虚部を比較する。別解として、加法定理から $p_{n+1}=p_n+xq_n$、$q_{n+1}=q_n-xp_n$ を作り、導関数の関係も帰納法で示せる。

【解答】
(1) 虚数単位を i とする。x の式 $(1+ix)^n$ を展開すると、二項定理により x の多項式になる。その実部を $q_n(x)$、虚部を $p_n(x)$ と定める。すなわち $q_n(x)+ip_n(x)=(1+ix)^n$ である。$x=\tan\theta$ とおくと $\cos\theta+i\sin\theta=(1+i\tan\theta)\cos\theta$ である。両辺を n 乗して $\cos n\theta+i\sin n\theta=(1+i\tan\theta)^n\cos^n\theta$ を得る。右辺は定義より $\{q_n(\tan\theta)+ip_n(\tan\theta)\}\cos^n\theta$ である。実部と虚部を比較して

$$\cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \qquad \sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

である。したがって、求める多項式 $p_n(x), q_n(x)$ は存在する。

(2) (1) で定めた恒等式 $q_n(x)+ip_n(x)=(1+ix)^n$ を x で微分する。すると $q_n'(x)+ip_n'(x)=ni(1+ix)^{n-1}$ である。さらに $(1+ix)^{n-1}=q_{n-1}(x)+ip_{n-1}(x)$ だから

$$ni(1+ix)^{n-1} = ni\{q_{n-1}(x)+ip_{n-1}(x)\} = -np_{n-1}(x)+inq_{n-1}(x)$$

である。実部と虚部を比較して $q_n'(x)=-np_{n-1}(x)$, $p_n'(x)=nq_{n-1}(x)$ を得る。すなわち $p_n'(x)=nq_{n-1}(x)$, $q_n'(x)=-np_{n-1}(x)$ である。

別解。複素数を使わず、加法定理だけでも構成できる。$n=1$ では $p_1(x)=x$, $q_1(x)=1$ とすれば $\sin\theta=x\cos\theta$, $\cos\theta=1\cdot\cos\theta$ である。

ある n で

$$\sin n\theta = p_n(x)\cos^n\theta, \qquad \cos n\theta = q_n(x)\cos^n\theta, \qquad x=\tan\theta$$

と書けているとする。加法定理より $\sin(n+1)\theta=\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta$ であるから $\sin(n+1)\theta=\{p_n(x)+xq_n(x)\}\cos^{n+1}\theta$ である。また $\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$ より $\cos(n+1)\theta=\{q_n(x)-xp_n(x)\}\cos^{n+1}\theta$ である。したがって $p_{n+1}(x)=p_n(x)+xq_n(x)$, $q_{n+1}(x)=q_n(x)-xp_n(x)$ とおけばよいので、(1) は帰納法でも示せる。

さらにこの漸化式から (2) も帰納法で出せる。まず $p_2(x)=2x$, $q_2(x)=1-x^2$ であるから $p_2'(x)=2=2q_1(x)$, $q_2'(x)=-2x=-2p_1(x)$ が成り立つ。ある $n\geqq 2$ で $p_n'(x)=nq_{n-1}(x)$, $q_n'(x)=-np_{n-1}(x)$ が成り立つとする。すると $p_{n+1}'(x)=p_n'(x)+q_n(x)+xq_n'(x)=nq_{n-1}(x)+q_n(x)-nxp_{n-1}(x)$ である。ここで $q_n(x)=q_{n-1}(x)-xp_{n-1}(x)$ だから $p_{n+1}'(x)=(n+1)q_n(x)$ となる。同様に $q_{n+1}'(x)=q_n'(x)-p_n(x)-xp_n'(x)=-np_{n-1}(x)-p_n(x)-nxq_{n-1}(x)$ であり、$p_n(x)=p_{n-1}(x)+xq_{n-1}(x)$ を使うと $q_{n+1}'(x)=-(n+1)p_n(x)$ である。よって (2) も示された。

【総評】 多倍角を多項式として扱う証明問題である。目安時間は 14 分。主解では $(1+ix)^n$ の実部・虚部を q_n, p_n に対応させる順序が最重要で、ここを逆にすると (2) の符号も崩れる。微分は恒等式として行えば一行で決まる。加法定理による別解も自然で、こちらは $p_{n+1}=p_n+xq_n$、$q_{n+1}=q_n-xp_n$ という漸化式が見えれば、存在と導関数の関係を同じ流れで証明できる。

【第 5 問】

xy 平面上，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ。

各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており，傾き $2/5$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

【方針】

傾き $2/5$ の直線を $2x-5y+c=0$ と書く。格子点 (m,n) からこの直線までの距離は $|2m-5n+c|/\sqrt{29}$ なので、問題は実数 c と整数集合との距離に変わる。$2m-5n$ は m,n を整数で動かすとすべての整数を取るため、任意の c には距離 $1/2$ 以下の整数がある。上限を示した後、$c=1/2$ の直線でそれより小さい半径が不可能なことを示す。

【解答】

傾き $2/5$ の直線は $y=\frac{2}{5}x+d$ と書ける。これを整理して $2x-5y+c=0$ の形で表すことにする。

格子点 (m,n) からこの直線までの距離は $\dfrac{|2m-5n+c|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\dfrac{|2m-5n+c|}{\sqrt{29}}$ である。

ここで 2 と 5 は互いに素であるから、$2m-5n$ はすべての整数値をとる。実際、任意の整数 k について $m=3k, \quad n=k$ とすれば $2m-5n=6k-5k=k$ である。

したがって、任意の実数 c に対して、ある整数 k を選べば $|k+c| \leqq \frac{1}{2}$ とできる。上の k を $2m-5n$ として実現すれば、対応する格子点から直線までの距離は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ 以下である。よって $r=\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ なら、傾き $2/5$ の任意の直線はどれかの円と共有点をもつ。

次に、これより小さい半径では不十分であることを示す。たとえば $2x-5y+\frac{1}{2}=0$ を考える。この直線に対しては、任意の格子点 (m,n) について $2m-5n$ は整数なので $\left|2m-5n+\frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$ である。したがって、どの格子点からこの直線までの距離も $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ 以上である。半径がこれより小さければ、この直線はどの円とも共有点をもたない。

以上より、求める最小値は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ である。

【総評】 格子点と平行直線族の距離を、整数への近さに置き換える問題である。目安時間は 12 分。上限だけなら「最も近い整数までの距離は高々 1/2」で出るが、最小値を確定するには $c=1/2$ のように全格子点から同時に遠い直線を示す必要がある。$2m-5n$ が全整数を動くことは、互いに素という言葉だけで済ませず、具体例 $m=3k, n=k$ を添えると明確になる。

【第 6 問】

$f(x)$ は $x>0$ で定義された連続な関数で，$0<x_1<x_2$ ならば，つねに $f(x_1)>f(x_2)>0$ であるものとし，

$$S(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$$

とおく。このとき，$S(1)=1$ であり，さらに任意の $a>0$ に対して，原点と点 $(a, f(a))$，原点と点 $(2a, f(2a))$ を結ぶ 2 直線と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(a)$ に等しいものとする。

(1) $S(x)$，$f(x)-2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ。

(2) $x>0$ に対して，

$$a(x)=\lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n x)$$

とおく。積分

$$\int_x^{2x} a(t)dt$$

の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ を決定せよ。

【方針】
まず面積条件を式に直す。2 本の直線は $y=f(a)x/a$、$y=f(2a)x/(2a)$ であり、囲まれる部分は $0\leqq x\leqq a$ では 2 直線の差、$a\leqq x\leqq 2a$ では曲線と後者の直線の差として積分できる。これにより $f(a)-2f(2a)=4S(a)/a$ が出る。一方 $S'(x)=2f(2x)-f(x)$ なので、S の微分方程式を解く。(2) は $h_n(t)=2^nf(2^nt)$ の単調性と積分値で極限を押さえる。(3) は $g(x)=xf(x)$ と置いて $g(x)-g(2x)$ を繰り返し、(2) の極限で残り項を消す。

【解答】
(1) 点 $(a,f(a))$ と原点を結ぶ直線は $y=\dfrac{f(a)}{a}x$ であり、点 $(2a,f(2a))$ と原点を結ぶ直線は $y=\dfrac{f(2a)}{2a}x$ である。f は正で単調減少だから、$0\leqq x\leqq a$ では曲線 $y=f(x)$ は 2 直線より上にあり、囲まれる部分の境界は 2 本の直線である。また $a\leqq x\leqq 2a$ では、曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=f(2a)x/(2a)$ より上にある。よって面積 $A(a)$ は

$$A(a)=\int_0^a\left(\frac{f(a)}{a}x-\frac{f(2a)}{2a}x\right)dx+\int_a^{2a}\left(f(x)-\frac{f(2a)}{2a}x\right)dx$$

である。

第 1 項は $\dfrac{af(a)}{2}-\dfrac{af(2a)}{4}$ であり、第 2 項は $S(a)-\dfrac{f(2a)}{2a}\cdot\dfrac{(2a)^2-a^2}{2}=S(a)-\dfrac{3af(2a)}{4}$ である。したがって $A(a)=S(a)+\dfrac{af(a)}{2}-af(2a)$ である。問題の条件より $A(a)=3S(a)$ だから $S(a)+\dfrac{af(a)}{2}-af(2a)=3S(a)$ であり $f(a)-2f(2a)=\dfrac{4S(a)}{a}$ を得る。

一方、

$$S(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$$

であるから $S'(x)=2f(2x)-f(x)$ である。先ほどの式より $2f(2x)-f(x)=-\dfrac{4S(x)}{x}$ なので $S'(x)=-\dfrac{4S(x)}{x}$ である。よって $\dfrac{S'(x)}{S(x)}=-\dfrac{4}{x}$ となり、$S(x)=Cx^{-4}$ である。$S(1)=1$ より $C=1$ だから $S(x)=\dfrac{1}{x^4}$ である。また $f(x)-2f(2x)=\dfrac{4S(x)}{x}$ より $f(x)-2f(2x)=\dfrac{4}{x^5}$ である。

(2) $h_n(t)=2^nf(2^nt)$ とおく。f は単調減少なので、$h_n(t)$ も t の単調減少関数である。すると

$$\int_x^{2x}h_n(t)dt=\int_x^{2x}2^nf(2^nt)dt=\int_{2^nx}^{2^{n+1}x}f(u)du=S(2^nx)$$

である。(1) より $S(2^nx)=\dfrac{1}{(2^nx)^4}=\dfrac{1}{2^{4n}x^4}$ である。

また、h_n は単調減少で正だから

$$0\leqq xh_n(2x)\leqq\int_x^{2x}h_n(t)dt=\frac{1}{2^{4n}x^4}$$

である。したがって $h_n(2x)\to 0$ である。$x>0$ は任意なので、任意の正の数 y について $2^nf(2^ny)\to 0$ となる。すなわち $a(y)=0$ である。

よって、求める積分は

$$\int_x^{2x}a(t)dt=0$$

である。

(3) $g(x)=xf(x)$ とおく。(1) の $f(x)-2f(2x)=\frac{4}{x^5}$ に x を掛けると $xf(x)-2xf(2x)=\frac{4}{x^4}$ である。左辺は $g(x)-g(2x)$ だから $g(x)-g(2x)=4x^{-4}$ である。

これを繰り返すと、任意の正整数 N について $g(x)=g(2^Nx)+4x^{-4}\left(1+2^{-4}+2^{-8}+\cdots+2^{-4(N-1)}\right)$ である。**(2)** より $g(2^Nx)=2^Nxf(2^Nx)=x\{2^Nf(2^Nx)\}\to xa(x)=0$ である。したがって $N\to\infty$ とすると

$$g(x)=4x^{-4}\cdot\frac{1}{1-2^{-4}}=4x^{-4}\cdot\frac{16}{15}=\frac{64}{15}x^{-4}$$

である。よって $xf(x)=\dfrac{64}{15}x^{-4}$ となり $f(x)=\dfrac{64}{15x^5}$ を得る。

実際、この関数は正で単調減少であり、

$$\int_x^{2x}\frac{64}{15t^5}dt=\frac{1}{x^4}$$

を満たすので、(1) で得た条件とも一致する。

【総評】　面積条件を関数方程式へ変換する理系らしい総合問題である。目安時間は 30 分。最初の面積を $0 \leqq x \leqq a$ と $a \leqq x \leqq 2a$ に分けるところが最重要で、ここで係数 $af(2a)$ を誤ると以後すべて崩れる。$S'(x) = 2f(2x) - f(x)$ と面積条件の左辺が反対符号で一致することに気づくと、$S(x) = x^{-4}$ はすぐ出る。(2) は単調性で極限を押さえる問題であり、(3) では $g(x) = xf(x)$ にして倍々の差を足し上げるのが自然である。