

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 1992 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

定数 a に対して，曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{a}{x}$ の $x \geq 1$ の部分を $C(a)$ とおく．

- (1) $C(a)$ が直線 $y = x$ の下部 $y < x$ に含まれるような実数 a の最大値 a_0 を求めよ．
- (2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき， $C(a_0)$ と 3 直線 $y = x$ ， $x = 1$ ， $x = \frac{1}{\cos \theta}$ によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体 V の体積 $V(\theta)$ を求めよ．
- (3) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} V(\theta)$ を求めよ．

第 2 問

(1) 空間内の直線 L を共通の境界線とし、角 θ で交わる 2 つの半平面 H_1, H_2 がある。 H_1 上に点 A , L 上に点 B , H_2 上に点 C がそれぞれ固定されている。ただし、 A, C は L 上にはないものとする。半平面 H_1 を、 L を軸として、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で回転させる。このとき、 θ が増加すると $\angle ABC$ も増加することを証明せよ。

(2) 空間内の相異なる 4 点 A, B, C, D について、不等式

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leq 2\pi$$

が成り立つことを証明せよ。

ただし、角の単位はラジアンを用いる。

第 3 問

多項式の列 $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1 + x$, $\dots\dots$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, $\dots\dots$ を考える.

- (1) 正の整数 n, m に対して, $P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_0(x), P_1(x), \dots\dots, P_{m-1}(x)$ のいずれかであることを証明せよ.
- (2) 等式 $P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4) = P_{100}(x)$ が成立するような正の整数の組 (l, m, n) をすべて求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)