

東京大学 1992 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

定数 a に対して、曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{a}{x}$ の $x \geq 1$ の部分を $C(a)$ とおく。

- (1) $C(a)$ が直線 $y = x$ の下部 $y < x$ に含まれるような実数 a の最大値 a_0 を求めよ。
- (2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $C(a_0)$ と 3 直線 $y = x$, $x = 1$, $x = \frac{1}{\cos \theta}$ によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体 V の体積 $V(\theta)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} V(\theta)$ を求めよ。

【方針】

(1) は $a < x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}$ の右辺の下限を調べる。(2) は外半径 x 、内半径 $C(a_0)$ の回転体として断面積を積分し、平方根を含む項を置換積分する。

【解答】

(1) 条件 $C(a) \subset \{y < x\}$ は

$$a < x^2 - x\sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1)$$

と同値である。右辺は

$$\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

であり、 $x \geq 1$ で $1/2$ より大きく、 $x \rightarrow \infty$ で $1/2$ に近づく。従って最大値は

$$a_0 = \frac{1}{2}.$$

(2) $b(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1/(2x)$ とおく。回転体の体積は

$$V(\theta) = \pi \int_1^{1/\cos \theta} \{x^2 - b(x)^2\} dx.$$

被積分関数は

$$1 - \frac{1}{4x^2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

ここで

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 1} - \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$$

だから

$$V(\theta) = \pi \left(\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta + \frac{\cos \theta}{4} + \theta - \frac{5}{4} \right).$$

(3) $\theta \rightarrow \pi/2 - 0$ で

$$\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \rightarrow 0.$$

従って

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2 - 0} V(\theta) = \frac{\pi(2\pi - 5)}{4}.$$

【総評】 曲線の一様な上下条件と無限区間の極限を回転体へつなぐ難問で目安は 22 分。 $a_0 = 1/2$ でも各有限 x で不等号が厳密に成り立つことを確認する。

【第 2 問】

- (1) 空間内の直線 L を共通の境界線とし、角 θ で交わる 2 つの半平面 H_1, H_2 がある。 H_1 上に点 A , L 上に点 B , H_2 上に点 C がそれぞれ固定されている。ただし、 A, C は L 上にはないものとする。半平面 H_1 を、 L を軸として、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で回転させる。このとき、 θ が増加すると $\angle ABC$ も増加することを証明せよ。
- (2) 空間内の相異なる 4 点 A, B, C, D について、不等式

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leq 2\pi$$

が成り立つことを証明せよ。

ただし、角の単位はラジアンを用いる。

【方針】

(1) は共通境界を座標軸にして 2 本のベクトルの内積を $\cos \theta$ の一次式にする。(2) は対角線 AC を蝶番として 2 つの三角形を平面へ開き、(1) により端点角が増加することを使う。

【解答】

(1) B を原点、 L を x 軸とする。適当な正数 p, q と実数 u, v により

$$\overrightarrow{BA} = (u, p, 0), \quad \overrightarrow{BC} = (v, q \cos \theta, q \sin \theta)$$

と置ける。従って

$$\cos \angle ABC = \frac{uv + pq \cos \theta}{\sqrt{u^2 + p^2} \sqrt{v^2 + q^2}}.$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ で $\cos \theta$ は減少し、 $p, q > 0$ だから右辺は減少する。従って $\angle ABC$ は増加する。

(2) 対角線 AC を共通境界として、三角形 ABC と ACD の半平面を考える。三角形 ACD を AC のまわりに回し、三角形 ABC と反対側の同一平面まで開く。

この操作で $\angle ABC, \angle CDA$ は変わらない。(1) を頂点 A, C に適用すると、 $\angle DAB, \angle BCD$ は減少しない。開いた後の 4 点は平面上の四角形を作り、その 4 内角の和は 2π である。従って開く前について

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leq 2\pi.$$

【総評】 空間四角形を平面へ展開して角度を比較する難問で目安は 20 分。(1) の単調性を対角線の両端へ適用し、残る 2 角が回転で不変であることを明記する。条件を使う箇所、途中計算、端点や等号の判定まで答案に明記すれば、論理を失わず完答できる。

【第 3 問】

多項式の列 $P_0(x) = 0, P_1(x) = 1, P_2(x) = 1 + x, \dots, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, \dots$ を考える.

- (1) 正の整数 n, m に対して, $P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{m-1}(x)$ のいずれかであることを証明せよ.
- (2) 等式 $P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4) = P_{100}(x)$ が成立するような正の整数の組 (l, m, n) をすべて求めよ.

【方針】

(1) は $n = qm + r$ として $x^m \equiv 1 \pmod{P_m(x)}$ を使う. (2) は各係数が 1 であることを, 指数 $i + 2j + 4k$ の一意表示条件として低次数から調べる.

【解答】

(1) $n = qm + r$ ($0 \leq r < m$) とする.

$$P_n(x) = P_m(x)(1 + x^m + \dots + x^{(q-1)m}) + x^{qm}P_r(x).$$

また $x^m - 1 = (x - 1)P_m(x)$ だから, $P_m(x)$ を法として x^{qm} の余りは 1 である. 従って余りは

$$P_r(x)$$

であり, $r = 0, 1, \dots, m - 1$ のいずれかである.

(2) 左辺の各項は

$$x^{i+2j+4k} \quad (0 \leq i < l, 0 \leq j < m, 0 \leq k < n)$$

である. 右辺では次数 0 から 99 までの係数がすべて 1 なので, この表示が各整数 0 から 99 に対してちょうど 1 通りでなければならない. また $x = 1$ を代入して

$$lmn = 100. \tag{1}$$

次数 1 を作るため $l \geq 2$ である. 次数 2 の表示が一意であることから, 「 $l \geq 3$ 」と「 $m \geq 2$ 」のちょうど一方が成り立つ.

まず $m \geq 2$ なら $l = 2$ である. このとき $P_2(x)P_m(x^2) = P_{2m}(x)$. $n = 1$ なら (1) より $m = 50$. $n \geq 2$ なら重複も欠落もなく重み 4 へつなぐため $2m = 4$, 従って $m = 2, n = 25$ である.

次に $m = 1$ なら, 次数 0, 1, 2, 3 を作るため $l \geq 4$. $n = 1$ なら $l = 100$. $n \geq 2$ なら重み 4 へつなぐため $l = 4$, 従って $n = 25$ である.

以上より

$$(l, m, n) = (100, 1, 1), (2, 50, 1), (4, 1, 25), (2, 2, 25).$$

各組は $P_a(x)P_b(x^a) = P_{ab}(x)$ を順に使えば実際に等式を満たす.

【総評】 多項式の係数を混合位取りの一意表示として解釈する難問で目安は 25 分. $lmn = 100$ だけでは不十分で, 次数 $1 \cdot 2 \cdot 4$ の係数から重なりと欠落を排除する必要がある.