

東京大学 1993 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n を 3 以上の自然数とする. xy 平面上, 原点を中心とし, 点 $(1, 0)$ をひとつの頂点にもつ正 n 角形を P とする.

- (1) P の像が P に完全に重なるような 1 次変換を表す行列をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた行列すべての和を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

正多角形を保つ一次変換は原点を固定する合同変換であり, n 個の回転と n 個の鏡映からなる. 各行列を角度で列挙し, 三角関数の等間隔和が 0 であることから総和を求める.

【解答】

(1) $k = 0, 1, \dots, n-1$ とする. 正 n 角形を自身へ移す変換は, $2\pi k/n$ の回転

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & -\sin \frac{2k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} & \cos \frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$$

と, 原点を通り偏角 $k\pi/n$ の直線に関する鏡映

$$S_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} & -\cos \frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$$

の合計 $2n$ 個である. 実際, 頂点 $(1, 0)$ の像を選んだ後, 隣の頂点を時計回り・反時計回りのどちらへ移すかでこの 2 種類に限られる.

(2) $n \geq 3$ では

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0.$$

従って R_k 全体の和も S_k 全体の和も零行列である. 求める総和は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▶ 解法 2

【方針】

正多角形を保つ変換が基底ベクトル e_1, e_2 をどこへ送るかで分類する。 e_1 の像を 1 頂点に固定すると、隣接頂点の順序を保つか反転するかの 2 択しかない。総和は各基底の像を幾何的に対消滅させて求める。

【解答】

(1)

$\theta_k = 2k\pi/n$ とする。頂点 $(1, 0)$ の像は $(\cos \theta_k, \sin \theta_k)$ のいずれかである。像を 1 つ固定すると、隣の頂点を反時計回り側へ送る場合と時計回り側へ送る場合の 2 通りしかない。それぞれ

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}, \quad S_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ \sin \theta_k & -\cos \theta_k \end{pmatrix}$$

である。 $k = 0, 1, \dots, n-1$ として、これら $2n$ 個がすべてである。

(2)

全行列の和を T とする。各 k について

$$R_k e_1 = S_k e_1 = (\cos \theta_k, \sin \theta_k)$$

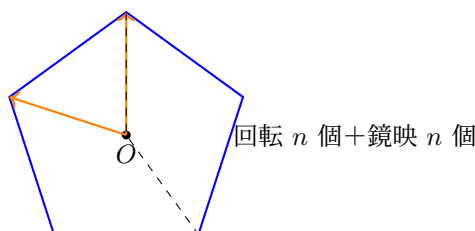
である。正 n 角形の中心は頂点の重心なので、全頂点ベクトルの和は零ベクトルである。したがって $T e_1 = \mathbf{0}$ である。

また

$$R_k e_2 = (-\sin \theta_k, \cos \theta_k), \quad S_k e_2 = (\sin \theta_k, -\cos \theta_k)$$

は互いに反対向きだから、各 k ごとに打ち消し合う。よって $T e_2 = \mathbf{0}$ でもある。2 本の基底の像がともに 0 なので

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



図は $n = 5$ の模式図である。

【総評】 難度 6、計算量 6、目安 15~18 分。正多角形を保つ一次変換は n 個の回転と n 個の鏡映に限られる。解法 1 は行列成分の三角関数和、解法 2 は 2 本の基底ベクトルの像の幾何的相殺で総和を求めた。回転だけを列挙しないことと、他の一次変換がない理由を頂点像と隣接順序で説明することが重要である。

【第 2 問】

xy 平面において、直線 l と点 A の距離を $d(l, A)$ と書くことにする。さらに、相異なる 3 点 $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ が与えられたとき

$$f(l) = d(l, A)^2 + d(l, B)^2 + d(l, C)^2$$

とおく。

- (1) ある与えられた直線に平行な直線のうち、 $f(l)$ を最小にする直線 l_0 は三角形 ABC の重心を通ることを示せ。
- (2) 異なる 3 本の直線が $f(l)$ を最小にするならば、三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

固定方向の直線を単位法線ベクトルで表し、切片について平方和を完成させる。(2) は重心を原点に移し、方向ごとの最小値を二次形式として表す。3 方向で最小なら方向に依存しないことを示し、座標条件から正三角形を導く。

【解答】

(1) 与えられた方向に垂直な単位ベクトルを $\vec{u}$ とし、平行な直線を

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = h$$

と表す。点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 、重心を $\vec{g} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/3$ とすると

$$f(l) = \sum_{\vec{v}=\vec{a},\vec{b},\vec{c}} (\vec{u} \cdot \vec{v} - h)^2.$$

$m = \vec{u} \cdot \vec{g}$ と置いて平方を完成すると

$$f(l) = \sum (\vec{u} \cdot \vec{v} - m)^2 + 3(h - m)^2.$$

よって最小となるのは $h = m$ 、すなわち直線が重心を通るときである。

(2) 重心を原点として $A = (r, 0), B = (u, v), C = (-r - u, -v)$ と置く。3 点は相異なり三角形を作るので、座標軸を選べば $r > 0, v \neq 0$ としてよい。

重心を通り単位法線が $(\cos \theta, \sin \theta)$ の直線に対する最小値は

$$F(\theta) = \sum_{X=A,B,C} (x_X \cos \theta + y_X \sin \theta)^2.$$

これは $F(\theta) = K + L \cos 2\theta + M \sin 2\theta$ の形である。定数でなければ、 $0 \leq \theta < \pi$ で最小にする方向は 1 つしかない。異なる 3 本が最小にするなら F は定数であり、

$$\sum x_X^2 = \sum y_X^2, \quad \sum x_X y_X = 0.$$

後式は $v(r + 2u) = 0$ だから $u = -r/2$ 。前式は

$$\frac{3r^2}{2} = 2v^2$$

だから $v^2 = 3r^2/4$ である。従って

$$A = (r, 0), \quad B = \left(-\frac{r}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}\right), \quad C = \left(-\frac{r}{2}, \mp \frac{\sqrt{3}r}{2}\right),$$

となり、3 辺の長さは等しい。よって三角形 ABC は正三角形である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は平行移動量を未知数として 3 つの符号付き距離の分散公式を使う。(2) は重心を原点に移し、方向 θ に対する最小値が $A + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta$ となることを利用する。3 方向で最小なら方向依存項が消えるので、底辺を水平に置いて正三角形を導く。

【解答】

(1)

与えられた方向に垂直な単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とし、平行な直線を

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = h$$

と表す。3 点の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 、重心を $\mathbf{g} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$ とする。 $m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$ と置けば、分散公式により

$$\begin{aligned} f(l) &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} - h)^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} - h)^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} - h)^2 \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} - m)^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} - m)^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} - m)^2 + 3(h - m)^2. \end{aligned}$$

最後の項だけが直線の平行移動で変わるから、唯一の最小は $h = m$ である。これは直線が重心を通ることを意味する。

(2)

(1) により、各方向で候補となる直線は重心を通る 1 本だけである。重心を原点とし、各点を (x_i, y_i) とする。法線の偏角を θ とすると

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^3 (x_i \cos \theta + y_i \sin \theta)^2 = A + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta$$

と書ける。 B, C の少なくとも一方が 0 でないなら、この関数が最小になる方向は $0 \leq \theta < \pi$ に 1 つしかない。異なる 3 本が全直線中の最小値を取るなら

$$B = C = 0,$$

すなわち

$$\sum x_i^2 = \sum y_i^2, \quad \sum x_i y_i = 0$$

でなければならない。

AB を水平に置き

$$A = (-d, 0), \quad B = (d, 0), \quad C = (s, t) \quad (d > 0, t \neq 0)$$

とする。重心を引いた 3 点に上の 2 条件を適用すると

$$\sum x_i y_i = \frac{2st}{3} = 0$$

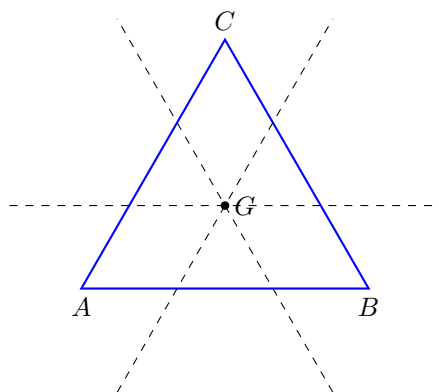
から $s = 0$ である。さらに

$$\sum x_i^2 = 2d^2, \quad \sum y_i^2 = \frac{2t^2}{3}$$

だから $t^2 = 3d^2$ となる。したがって

$$AB^2 = 4d^2, \quad AC^2 = BC^2 = d^2 + t^2 = 4d^2.$$

よって三角形 ABC は正三角形である。



正三角形では、重心を通るすべての方向で同じ最小値を取る。

【総評】 難度 8、計算量 7、目安 25～30 分。(1) は固定方向で切片だけを最小化し、(2) は方向も含む全直線の最小化へ進む二段階の問題である。2 解法で重心を通る唯一性、方向関数の 2 倍角表示、3 方向の最小が等方性を強制することを照合し、座標条件から 3 辺が等しいことまで示した。

【第 3 問】

放物線の一部 $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, を y 軸のまわりに回転してできる回転体型の容器に水を満たし、このなかに、半径 r の鉛の球を、それが容器につかえて止るまでゆっくり沈めた。ただし、鉛直線を y 軸とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) もとの水面に高さから球の中心の高さを引いた差 s を r の関数として表せ。
- (2) あふれ出る水の体積を最大にする r の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

球の中心を y 軸上の高さ h に置き、底、放物面、上端の縁のどこで最初に止まるかを半径で分ける。(2) は水面下に入る球の体積を、全球または球冠として表し、各範囲で増減を調べる。

【解答】

(1) 球の中心の高さを h とする。 $0 < r \leq 1/2$ では球は底に接して止まり $h = r$ である。

側面に接する場合、接点の動径を $x > 0$ とする。球の下側は

$$y = h - \sqrt{r^2 - x^2}$$

であり、放物線 $y = x^2$ と接するから

$$2x = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

従って $\sqrt{r^2 - x^2} = 1/2$ 、すなわち

$$x^2 = r^2 - \frac{1}{4}, \quad h = x^2 + \frac{1}{2} = r^2 + \frac{1}{4}.$$

接点が容器の側面 $x \leq 2$ にある条件は $r \leq \sqrt{17}/2$ である。これより大きい球は上端の円 $x = 2, y = 4$ に接して止まり

$$h = 4 + \sqrt{r^2 - 4}.$$

もとの水面は高さ 4 だから、求める差は

$$s(r) = \begin{cases} 4 - r, & 0 < r \leq 1/2, \\ \frac{15}{4} - r^2, & 1/2 \leq r \leq \sqrt{17}/2, \\ -\sqrt{r^2 - 4}, & r \geq \sqrt{17}/2. \end{cases}$$

(2) あふれる体積は球のうち平面 $y = 4$ より下に入る部分の体積である。 $r \leq 3/2$ では球全体が水面下に入り

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

で、これは増加する。

$3/2 < r \leq \sqrt{17}/2$ では、水面下の球冠の高さは

$$H = r + s = r + \frac{15}{4} - r^2$$

である。球冠の体積は

$$V = \frac{\pi}{3} H^2 (3r - H).$$

微分すると、その符号は $H - (2r - 1)$ の符号に一致する。従って最大となるのは

$$-r^2 + r + \frac{15}{4} = 2r - 1$$

を満たすとき、すなわち

$$r = \sqrt{5} - \frac{1}{2}.$$

$r \geq \sqrt{17}/2$ では $H = r - \sqrt{r^2 - 4}$ となり、直接微分すると V は減少する。境界値も上の極大値より小さい。よって求める半径は

$$r = \sqrt{5} - \frac{1}{2}.$$

▶ 解法 2

【方針】

(1) は球の中心高 h を、底・放物面・上端のどこに接するかで求める。(2) では水面下の球部分の高さ $H = r + 4 - h$ を主変数にし、球冠公式を使う。上端接触後は $2rH - H^2 = 4$ へ置き換えると単調性を短く示せる。

【解答】

(1)

球の中心を $(0, h)$ とする。 $0 < r \leq 1/2$ では底に接して $h = r$ である。放物線に接する場合、接点の横座標を $x > 0$ とすると球の下側は

$$y = h - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

$y = x^2$ と接するので傾きが等しく

$$2x = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

よって

$$x^2 = r^2 - \frac{1}{4}, \quad h = r^2 + \frac{1}{4}.$$

接点が $x \leq 2$ にある条件は $r \leq \sqrt{17}/2$ である。それより大きいときは上端 $(2, 4)$ に接し

$$h = 4 + \sqrt{r^2 - 4}.$$

したがって $s = 4 - h$ は

$$s(r) = \begin{cases} 4 - r, & 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{15}{4} - r^2, & \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{17}}{2}, \\ -\sqrt{r^2 - 4}, & r \geq \frac{\sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

境界では隣り合う式の値が一致する。

(2)

水面下に入る球部分の高さを

$$H = r + s = r + 4 - h$$

とする。 $r \leq 3/2$ では $H = 2r$ で球全体が水面下にあり、

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

は増加する。

$3/2 < r \leq \sqrt{17}/2$ では

$$H = -r^2 + r + \frac{15}{4}, \quad V = \frac{\pi}{3} H^2 (3r - H).$$

微分して整理すると

$$V' = 2\pi r H \{H - (2r - 1)\}.$$

この範囲で $rH > 0$ なので、増減が切り替わるのは

$$-r^2 + r + \frac{15}{4} = 2r - 1$$

のときである。正の解は

$$r = \sqrt{5} - \frac{1}{2}.$$

$r \geq \sqrt{17}/2$ では

$$H = r - \sqrt{r^2 - 4}.$$

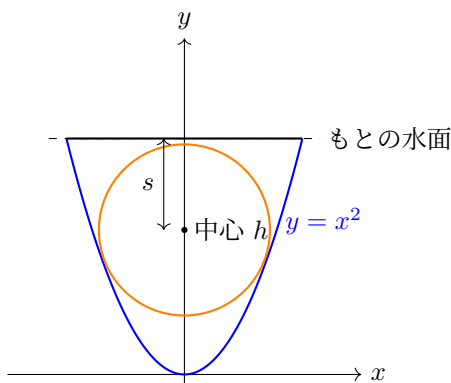
$2rH - H^2 = 4$ から

$$r = \frac{H^2 + 4}{2H}, \quad V = \frac{\pi}{6}H(H^2 + 12).$$

r が増えると H は減り、右辺は $H > 0$ で増加関数だから V は減少する。以上より全範囲での最大は

$$r = \sqrt{5} - \frac{1}{2}$$

のときに得られる。



【総評】 難度 9、計算量 9、目安 30～35 分。球が底・放物面・上端へ接する 3 範囲と、球全体・球冠の切替えをすべて管理する必要がある。2 解法で接触半径 $1/2, \sqrt{17}/2$ 、全球の切替え $3/2$ 、球冠体積の増減を照合した。最大半径 $r = \sqrt{5} - 1/2$ は中央範囲内にあり、上端接触後は単調減少する。