

入 学 試 験 問 題



数 学

東 京 大 学 1993 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

すべての面が合同な四面体 $ABCD$ がある。頂点 A, B, C はそれぞれ x, y, z 軸上の正の部分にあり、辺の長さは $AB = 2l - 1, BC = 2l, CA = 2l + 1$ ($l > 2$) である。四面体 $ABCD$ の体積を $V(l)$ とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{l \rightarrow 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

第 2 問

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_n が偶数となることと、 n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。
- (2) a_n が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ。

第 3 問

xy 平面内に次の二つの集合 l , m を考える。

$$l = \{(-5, y) \mid -5 < y < 5\}, \quad m = \{(5, y) \mid -5 < y < 5\}$$

l , m 上にない 2 点 A , B に対し, A , B を l , m と交わらない線分または折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(A, B)$ で表す。

2 点 $P(-9, -3)$, $Q(9, 3)$ に対し $d(P, R) = d(Q, R)$ となる点 R の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

第 4 問

n を 2 以上の自然数とし, $f(x) = x^n + px + q$ (p, q は実数) の形の n 次関数について積分

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$$

を考える。 I を最小にするような (p, q) が唯一組存在することを示し, そのような (p, q) と I の最小値を求めよ。

第 5 問

1 と 0 を 5 個ならべた列 10110 をある人が繰返し書き写すとする。ただしこの列を S で表し、これの第 1 回の写しを S_1 で表すとき、第 2 回目には書き写すときは S_1 を書き写す。 S_1 の写しを S_2 とするとき、第 3 回目には S_2 を書き写す。以下同様に続ける。

この人が 0 を 1 に写しまちがえる確率は p ($0 < p < 1$) であり、1 を 0 に写しまちがえる確率は q ($0 < q < 1$) であるが、それ以外の写しまちがいはないものとする。第 n 回目の写し S_n が S に一致する確率を $C(n)$ とするとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(n)$$

を求めよ。

第 6 問

時刻 t における座標が

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

で表される xy 平面上の点 P の運動を考える。

(1) P の速さ，すなわち速度ベクトル

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

の大きさの最大値と最小値を求めよ。

(2) t が $0 \leq t < 2\pi$ の範囲を動く間に P が 2 回以上通過する点が唯一つ存在することを示し，その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)