

東京大学 1993 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

すべての面が合同な四面体 $ABCD$ がある。頂点 A, B, C はそれぞれ x, y, z 軸上の正の部分にあり、辺の長さは $AB = 2l - 1, BC = 2l, CA = 2l + 1$ ($l > 2$) である。四面体 $ABCD$ の体積を $V(l)$ とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{l \rightarrow 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

▶ 解法 1

【方針】

4 つの面がすべて合同な四面体では、向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい。この型の四面体は、中心を原点に置いた対称な 4 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ で表すと辺の長さや体積が計算しやすい。3 種類の辺の長さから x^2, y^2, z^2 を求め、体積 $V(l) = 8xyz/3$ を出す。最後は y^2 だけが $l-2$ を含むことに注目して、 $V(l)/\sqrt{l-2}$ の極限を取る。

【解答】

すべての面が合同である四面体では、向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい。そこで、合同な四面体として $(x, y, z), (x, -y, -z), (-x, y, -z), (-x, -y, z)$ を頂点にもつものを考える。この四面体の各面は、3 辺の長さが $2\sqrt{y^2 + z^2}, 2\sqrt{x^2 + z^2}, 2\sqrt{x^2 + y^2}$ で同じになるので、問題の四面体と同じ型である。

3 つの辺の長さを $2\sqrt{y^2 + z^2} = 2l - 1, 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2l, 2\sqrt{x^2 + z^2} = 2l + 1$ と対応させる。両辺を 2 乗して $y^2 + z^2 = \frac{(2l-1)^2}{4}, x^2 + y^2 = l^2, x^2 + z^2 = \frac{(2l+1)^2}{4}$ を得る。これらを足し引きすると $x^2 = \frac{(x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) - (y^2 + z^2)}{2} = \frac{l(l+2)}{2}, y^2 = \frac{(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) - (x^2 + z^2)}{2} = \frac{l(l-2)}{2}, z^2 = \frac{(x^2 + z^2) + (y^2 + z^2) - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{2l^2 + 1}{4}$ である。 $l > 2$ なので x, y, z は正に取れる。

この対称配置の体積を求める。頂点 (x, y, z) から他の 3 頂点へ向かうベクトルを $(0, -2y, -2z), (-2x, 0, -2z), (-2x, -2y, 0)$ とすると、これらで作る平行六面体の体積は $16xyz$ である。したがって四面体の体積は $V(l) = \frac{16xyz}{6} = \frac{8}{3}xyz$ である。

上で求めた値を代入すると

$$V(l) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{l(l+2)}{2}} \sqrt{\frac{l(l-2)}{2}} \sqrt{\frac{2l^2+1}{4}}$$

であるから

$$\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{l(l+2)}{2}} \sqrt{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{2l^2+1}{4}}$$

となる。よって $l \rightarrow 2$ とすれば

$$\lim_{l \rightarrow 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}} = \frac{8}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = 8$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

3 種類の辺長を p, q, r とし、1 頂点から出る 3 本の辺ベクトルの内積を余弦定理で決める。四面体の体積公式を整理して得られる等面四面体の対称な公式へ代入し、 $\sqrt{l-2}$ の因子を直接抜く。

【解答】

すべての面が合同なら、向かい合う辺はそれぞれ等しい。3 種類の辺長を

$$p = 2l - 1, \quad q = 2l, \quad r = 2l + 1$$

とする。1 頂点から出る 3 本の辺ベクトルを考え、余弦定理でその内積を表して体積を計算すると、等面四面体について

$$72V^2 = (p^2 + q^2 - r^2)(p^2 + r^2 - q^2)(q^2 + r^2 - p^2)$$

を得る。この式は、3 本の辺ベクトルが作る平行六面体の体積が四面体の体積の 6 倍であることから、成分計算だけで導ける。

今回は

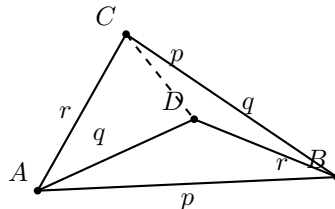
$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - r^2 &= 4l(l-2), \\ p^2 + r^2 - q^2 &= 2(2l^2 + 1), \\ q^2 + r^2 - p^2 &= 4l(l+2). \end{aligned}$$

したがって $V > 0$ に注意すると

$$V = \frac{2}{3} l \sqrt{(l-2)(l+2)(2l^2+1)}.$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}} &= \lim_{l \rightarrow 2} \frac{2}{3} l \sqrt{(l+2)(2l^2+1)} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{4 \cdot 9} = 8. \end{aligned}$$



向かい合う辺が同じ記号になることが、公式の対称性に対応している。

【総評】 難度 7、計算量 6、目安 20～24 分。等面四面体では向かい合う辺が等しいことを入口にする。解法 1 は対称座標、解法 2 は 3 辺長だけの体積公式を用い、いずれも $V = (2/3)l\sqrt{(l-2)(l+2)(2l^2+1)}$ を与える。退化因子 $l-2$ を先に分離すれば極限は安定して 8 となる。

【第 2 問】

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_n が偶数となることと、 n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。
 (2) a_n が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 2 で割った余りを追い、隣り合う 2 項の余りの組が周期 3 で戻ることを示す。(2) では 10 の倍数であることを、2 の倍数かつ 5 の倍数であることに分解する。5 で割った余りも同じ漸化式から周期を持ち、初期の組 $(1, 3)$ に戻るところまで確認する。最後に $n \equiv 0 \pmod{3}$ と $n \equiv 0 \pmod{4}$ を同時に満たす条件へまとめる。

【解答】

(1) a_n を 2 で割った余りを考える。 $3 \equiv 1, -7 \equiv 1 \pmod{2}$ であるから、漸化式より $a_{n+2} \equiv a_{n+1} + a_n \pmod{2}$ である。初期値は $a_1 \equiv 1, a_2 \equiv 1 \pmod{2}$ であるから $a_3 \equiv 0, a_4 \equiv 1, a_5 \equiv 1 \pmod{2}$ となる。ここで隣り合う 2 項の余りが $(a_4, a_5) \equiv (1, 1)$ となり、初期の組に戻る。したがって余りは $1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$ と周期 3 で繰り返す。

よって a_n が偶数 $\iff n \equiv 0 \pmod{3}$ である。

(2)

10 の倍数であるためには、2 の倍数かつ 5 の倍数であることが必要十分である。(1) より、2 の倍数である条件は $n \equiv 0 \pmod{3}$ である。

次に 5 で割った余りを調べる。漸化式は $a_{n+2} \equiv 3a_{n+1} - 2a_n \pmod{5}$ である。初めから計算すると

$$a_1 \equiv 1, \quad a_2 \equiv 3, \quad a_3 \equiv 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{5},$$

$a_4 \equiv 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{5}$ である。さらに

$$a_5 \equiv 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \equiv 1, \quad a_6 \equiv 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \equiv 3 \pmod{5}$$

となり、隣り合う 2 項の余りが初期の組 $(1, 3)$ に戻る。したがって 5 で割った余りは $1, 3, 2, 0, 1, 3, 2, 0, \dots$ と周期 4 で繰り返し、 $5 \mid a_n \iff n \equiv 0 \pmod{4}$ である。

以上より a_n が 10 の倍数であるための必要十分条件は $n \equiv 0 \pmod{3}, n \equiv 0 \pmod{4}$ を同時に満たすことである。3 と 4 は互いに素なので、これは $n \equiv 0 \pmod{12}$ と同値である。したがって a_n が 10 の倍数 $\iff n$ が 12 の倍数である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) と (2) を別々の法で処理せず、最初から 10 で割った余りの組 (a_n, a_{n+1}) を追う。12 項で初期の組へ戻ることを示せば、その 1 周期から偶数となる位置と 10 の倍数となる位置を同時に読める。

【解答】

(1)

漸化式を 10 で考える。初期値から順に計算すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_n \bmod 10$	1	3	2	5	1	8	7	5	6	3	7	0

となる。さらに

$$a_{13} \equiv 1, \quad a_{14} \equiv 3 \pmod{10}$$

で、隣り合う余りの組が初期の $(1, 3)$ に戻る。次の組は直前の組だけで一意に定まるので、この 12 項が以後繰り返される。

1 周期のうち偶数であるのは $n = 3, 6, 9, 12$ の位置である。したがって

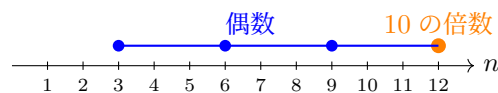
$$a_n \text{ が偶数} \iff n \equiv 0 \pmod{3}.$$

(2)

同じ表で余りが 0 になるのは $n = 12$ の位置だけである。周期性から

$$a_n \equiv 0 \pmod{10} \iff n \equiv 0 \pmod{12}.$$

よって a_n が 10 の倍数となるための必要十分条件は、 n が 12 の倍数であることである。



【総評】 難度 5、計算量 4、目安 12～15 分。解法 1 は法 2 と法 5 の周期を分けて最小公倍数へまとめ、解法 2 は法 10 の 12 項周期を直接検証した。どちらも隣接 2 項の余りが初期値へ戻るため周期性が保証される。偶数条件は 3 の倍数、10 の倍数条件は 12 の倍数であり、必要性和十分性を両方確認した。

【第 3 問】

xy 平面内に次の二つの集合 l, m を考える。

$$l = \{(-5, y) \mid -5 < y < 5\}, \quad m = \{(5, y) \mid -5 < y < 5\}$$

l, m 上にない 2 点 A, B に対し、 A, B を l, m と交わらない線分または折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(A, B)$ で表す。

2 点 $P(-9, -3), Q(9, 3)$ に対し $d(P, R) = d(Q, R)$ となる点 R の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

障害物は 2 本の開線分なので、直線で結べない最短経路は端点を回る折れ線になる。4 つの端点を置き、 P からの距離候補と Q からの距離候補を比較する。直線で見通せる部分では通常の等距離条件 $PR = QR$ から直線 $y = -3x$ が出る。上端を回る部分と下端を回る部分では、2 焦点からの距離差が一定になるので双曲線の弧になる。中央では左右の端点までの距離が等しい条件から $y = -x$ となり、双曲線との交点で弧の範囲を切り替える。

【解答】

4 つの端点を $L_- = (-5, -5), L_+ = (-5, 5), M_- = (5, -5), M_+ = (5, 5)$ とおく。これらは障害物 l, m には含まれないので、経路は端点を通してよい。また $PL_- = QM_+ = 2\sqrt{5}, PL_+ = QM_- = 4\sqrt{5}$ である。

最短経路が途中で曲がるとき、曲がる点は端点でよい。端点以外で曲がっている部分があれば、その前後を直線で結び直すことで短くできるからである。したがって、直線で見通せる場合と、端点を 1 つまたは 2 つ通る場合を比較すればよい。

まず、 P と R , Q と R がともに直線で見通せる部分では $d(P, R) = PR$, $d(Q, R) = QR$ である。したがって等距離条件は $PR = QR$ であり、 $P(-9, -3)$ と $Q(9, 3)$ の垂直二等分線 $y = -3x$ を得る。この直線上で両方の直線経路が障害物を横切らないのは $x \leq -3$, $x \geq 3$ の部分である。

次に上側の端点を回る部分を考える。この部分では $d(P, R) = PL_+ + L_+R = 4\sqrt{5} + L_+R$, $d(Q, R) = QM_+ + M_+R = 2\sqrt{5} + M_+R$ である。等距離条件は $M_+R - L_+R = 2\sqrt{5}$ となる。焦点が L_+, M_+ で、焦点間距離が 10, 距離差が $2\sqrt{5}$ の双曲線であるから、式は $\frac{x^2}{5} - \frac{(y-5)^2}{20} = 1$ である。ここで左側の枝だけが現れる。

この双曲線を $y = 5 \pm 2\sqrt{x^2 - 5}$ と書く。上側の弧は、直線部分 $y = -3x$ との接点 $(-3, 9)$ から頂点 $(-\sqrt{5}, 5)$ までなので $-3 \leq x \leq -\sqrt{5}$, $y = 5 + 2\sqrt{x^2 - 5}$ である。下側の弧は、後で出る中央の直線 $y = -x$ との交点まで残る。交点を求めるため、 $y = -x$ を下側の式へ代入すると $-x = 5 - 2\sqrt{x^2 - 5}$ である。 $x < 0$ として解くと $x = -\frac{4\sqrt{10} - 5}{3}$ を得る。

そこで $a = \frac{4\sqrt{10} - 5}{3}$ とおくと、下側の弧は $-a \leq x \leq -\sqrt{5}$, $y = 5 - 2\sqrt{x^2 - 5}$ である。

中央部分では、 P からは下左端 L_- を、 Q からは上右端 M_+ を回る経路が最短になる。このとき $d(P, R) = 2\sqrt{5} + L_-R$, $d(Q, R) = 2\sqrt{5} + M_+R$ であるから、等距離条件は $L_-R = M_+R$ である。したがって $y = -x$ を得る。この直線部分は、上側の双曲線弧との交点から、下側の対称な双曲線弧との交点までであるから $-a \leq x \leq a$ である。

下側は原点に関する対称性により、上側と同様に $\frac{x^2}{5} - \frac{(y+5)^2}{20} = 1$ の右側の枝が現れる。具体的には $\sqrt{5} \leq x \leq a$, $y = -5 + 2\sqrt{x^2 - 5}$ および $\sqrt{5} \leq x \leq 3$, $y = -5 - 2\sqrt{x^2 - 5}$ である。

以上より求める軌跡は、次の部分の和である。 $y = -3x$ ($x \leq -3$, $x \geq 3$), $\frac{x^2}{5} - \frac{(y-5)^2}{20} = 1$ の上で示した 2 つの弧, $y = -x$ ($-a \leq x \leq a$), $a = \frac{4\sqrt{10} - 5}{3}$, $\frac{x^2}{5} - \frac{(y+5)^2}{20} = 1$ の上で示した 2 つの弧。図では、左上から $y = -3x$ の半直線, 焦点 L_+, M_+ の双曲線弧, 中央の線分 $y = -x$, 焦点 L_-, M_- の双曲線弧, 右下の $y = -3x$ の半直線を順につなぐ。

▶ 解法 2

【方針】

平面を「直線で見通せる領域」「上端を回る領域」「下端を回る領域」に分け、それぞれで $d(P, R) - d(Q, R)$ を 1 本の式にする。等高線 0 を求めると直線または双曲線になり、候補同士の距離が等しくなる接点で有効な弧だけを切り出せる。

【解答】

端点を

$$L_{\pm} = (-5, \pm 5), \quad M_{\pm} = (5, \pm 5)$$

と置き、

$$a = \frac{4\sqrt{10} - 5}{3}$$

とする。線分障害物を避ける最短折れ線は、曲がるなら必ず $L_{\pm}, M_{\pm}$ のいずれかで曲がる。したがって各領域で有効な端点経路を比較すればよい。

两点から R が直線で見通せる外側では

$$d(P, R) = PR, \quad d(Q, R) = QR.$$

等距離線は PQ の垂直二等分線 $y = -3x$ であり、有効部分は $x \leq -3$ と $x \geq 3$ である。

上側を回る領域では

$$d(P, R) = 4\sqrt{5} + L_+R, \quad d(Q, R) = 2\sqrt{5} + M_+R.$$

よって

$$M_+R - L_+R = 2\sqrt{5}, \quad \frac{x^2}{5} - \frac{(y-5)^2}{20} = 1.$$

この左枝のうち有効なのは

$$\begin{cases} y = 5 + 2\sqrt{x^2 - 5}, & -3 \leq x \leq -\sqrt{5}, \\ y = 5 - 2\sqrt{x^2 - 5}, & -a \leq x \leq -\sqrt{5}. \end{cases}$$

第 1 の端点 $(-3, 9)$ は $y = -3x$ との交点である。第 2 の端点 $(-a, a)$ は $y = -x$ との交点であり、代入して得る $3a^2 + 10a - 45 = 0$ の正根が上の a である。

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 2qx^n dx = \frac{2q}{n+1},$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 q^2 dx = q^2, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p^2 x^2 dx = \frac{p^2}{3}$$

である。よって $I = \frac{p^2}{3} + q^2 + \frac{2q}{n+1} + \frac{1}{2n+1}$ となる。平方完成して

$$I = \frac{p^2}{3} + \left(q + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

である。したがって最小にする組はただ一つ $p = 0, \quad q = -\frac{1}{n+1}$ であり、最小値は $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$ である。

次に n が奇数の場合を考える。このとき $x^n + px$ は奇関数、 q は偶関数であるから、交差する項は消えて

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^n + px)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 q^2 dx$$

である。計算すると $I = \frac{1}{2n+1} + \frac{2p}{n+2} + \frac{p^2}{3} + q^2$ である。これを平方完成すると

$$I = \frac{1}{3} \left(p + \frac{3}{n+2}\right)^2 + q^2 + \frac{1}{2n+1} - \frac{3}{(n+2)^2}$$

となる。したがって最小にする組はただ一つ $p = -\frac{3}{n+2}, \quad q = 0$ であり、最小値は $\frac{1}{2n+1} - \frac{3}{(n+2)^2}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

p, q を未知数とする 2 次式を展開する代わりに、最小点では定数方向と x 方向への一次変化が 0 になることを使う。2 本の積分条件から候補を求め、最後に差の二乗積分が正であることから最小性と一意性を保証する。

【解答】

$F(x) = x^n + px + q$ とする。 p を $p+h$ に変えたときの I の一次の変化が 0 であること、 q を $q+h$ に変えたときの一次の変化が 0 であることから、最小点は

$$\int_{-1}^1 F(x)x dx = 0, \quad \int_{-1}^1 F(x) dx = 0$$

を満たす。

n が偶数なら、奇関数の積分が 0 になることにより

$$\frac{2p}{3} = 0, \quad \frac{2}{n+1} + 2q = 0.$$

したがって

$$p = 0, \quad q = -\frac{1}{n+1}.$$

このとき

$$I_{\min} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

n が奇数なら

$$\frac{2}{n+2} + \frac{2p}{3} = 0, \quad 2q = 0,$$

したがって

$$p = -\frac{3}{n+2}, \quad q = 0,$$

かつ

$$I_{\min} = \frac{1}{2n+1} - \frac{3}{(n+2)^2}.$$

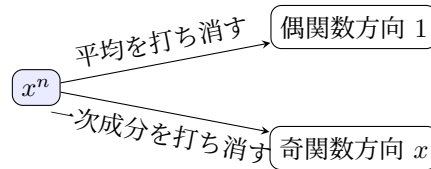
一意性を確認する。上で得た最小候補を (p_0, q_0) とし、 $F_0(x) = x^n + p_0x + q_0$ と置く。積分条件から

$$\int_{-1}^1 F_0(x) \{(p - p_0)x + (q - q_0)\} dx = 0.$$

よって任意の (p, q) に対して

$$I - I_{\min} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{(p - p_0)x + (q - q_0)\}^2 dx \geq 0.$$

等号が成り立つには一次式が恒等的に 0 でなければならず、 $p = p_0, q = q_0$ である。したがって最小の組は唯一である。



n の偶奇により、実際に働く方向が一方だけになる。

【総評】 難度 6、計算量 5、目安 16~20 分。対称区間では偶関数と奇関数の積分が消えるため、 n の偶奇で調整すべき係数が入れ替わる。解法 1 は平方完成、解法 2 は 2 本の直交条件から候補を求めた。最後に差の二乗積分を用い、単なる停留条件ではなく大域的最小性と一意性まで保証した。

【第 5 問】

1 と 0 を 5 個ならべた列 10110 をある人が繰返し書き写すとする。ただしこの列を S で表し、これの第 1 回の写しを S_1 で表すとき、第 2 回目には書き写すときは S_1 を書き写す。 S_1 の写しを S_2 とするとき、第 3 回目には S_2 を書き写す。以下同様に続ける。

この人が 0 を 1 に写しまちがえる確率は p ($0 < p < 1$) であり、1 を 0 に写しまちがえる確率は q ($0 < q < 1$) であるが、それ以外の写しまちがいはないものとする。第 n 回目の写し S_n が S に一致する確率を $C(n)$ とするとき、極限値

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(n)$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

5 桁をまとめて扱うのではなく、1 つの桁が 1 である確率を追う。1 から 0 へ誤る確率が q 、0 から 1 へ誤る確率が p なので、その桁が 1 である確率は 1 次の漸化式を満たす。この漸化式の極限を求めると、十分多く写した後に 1 である確率は $\frac{p}{p+q}$ 、0 である確率は $q/(p+q)$ になる。元の列 10110 には 1 が 3 個、0 が 2 個あるので、各桁の独立性を使って確率を掛け合わせる。

【解答】

1 つの桁に注目し、第 n 回の写しでその桁が 1 である確率を r_n とする。次に書き写すとき、前の桁が 0 なら確率 p で 1 になり、前の桁が 1 なら確率 $1 - q$ で 1 のままである。したがって $r_{n+1} = p(1 - r_n) + (1 - q)r_n$ である。整理すると $r_{n+1} = p + (1 - p - q)r_n$ となる。

この漸化式の極限を r とすれば $r = p + (1 - p - q)r$ であるから $r = \frac{p}{p+q}$ である。実際、 $r_{n+1} - \frac{p}{p+q} = (1 - p - q) \left(r_n - \frac{p}{p+q} \right)$ であり、 $0 < p < 1, 0 < q < 1$ より $-1 < 1 - p - q < 1$ だから、 r_n は初期値が 0 でも 1 でも $\frac{p}{p+q}$ に近づく。

したがって十分多く写した後、1 つの桁が 1 である確率は $\frac{p}{p+q}$ に近づき、0 である確率は $1 - \frac{p}{p+q} = \frac{q}{p+q}$ に近づく。

元の列 $S = 10110$ には 1 が 3 個、0 が 2 個ある。各桁の写し間違いは互いに独立に起こり、桁ごとの変化規則も同じである。よって S_n が S と一致する確率の極限は、元が 1 である 3 桁が 1 になる極限確率と、元が 0 である 2 桁が 0 になる極限確率の積である。すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = \left(\frac{p}{p+q} \right)^3 \left(\frac{q}{p+q} \right)^2 = \frac{p^3 q^2}{(p+q)^5}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

元の桁が 1 の場合と 0 の場合を分け、各桁が元の値に一致する確率を明示式まで求める。5 桁全体の確率 $C(n)$ を有限段階で積の形に書いてから極限を取れば、初期値の違いも独立性も見通しよく確認できる。

【解答】

1 桁について、第 n 回の写しが 1 である確率を r_n とする。写す前を第 0 回と数えると

$$r_{n+1} = p(1 - r_n) + (1 - q)r_n = p + (1 - p - q)r_n.$$

$$\lambda = 1 - p - q, \quad r = \frac{p}{p + q}$$

と置けば

$$r_{n+1} - r = \lambda(r_n - r), \quad |\lambda| < 1.$$

元の桁が 1 なら $r_0 = 1$ なので、第 n 回にも 1 である確率は

$$\alpha_n = \frac{p}{p + q} + \frac{q}{p + q}\lambda^n.$$

元の桁が 0 なら $r_0 = 0$ であり、第 n 回にも 0 である確率は

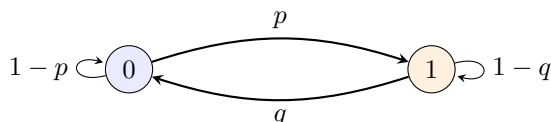
$$\beta_n = 1 - \left\{ \frac{p}{p + q} - \frac{p}{p + q}\lambda^n \right\} = \frac{q}{p + q} + \frac{p}{p + q}\lambda^n.$$

元の列 10110 は 1 を 3 個、0 を 2 個含む。各桁の誤写は独立であるから

$$C(n) = \alpha_n^3 \beta_n^2.$$

$|\lambda| < 1$ より $\lambda^n \rightarrow 0$ なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = \left(\frac{p}{p + q} \right)^3 \left(\frac{q}{p + q} \right)^2 = \frac{p^3 q^2}{(p + q)^5}.$$



【総評】 難度 6、計算量 4、目安 14～17 分。5 桁全体を 32 状態で追う必要はなく、1 桁の 2 状態遷移で十分である。解法 1 は固定値への収束、解法 2 は初期値 $0 \cdot 1$ それぞれの明示式を求めた。各桁の独立性と元の列に 1 が 3 個、0 が 2 個あることを明記して、極限 $p^3 q^2 / (p + q)^5$ を再確認した。

【第 6 問】

時刻 t における座標が

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

で表される xy 平面上の点 P の運動を考える。

(1) P の速さ、すなわち速度ベクトル

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

の大きさの最大値と最小値を求めよ。

(2) t が $0 \leq t < 2\pi$ の範囲を動く間に P が 2 回以上通過する点が唯一つ存在することを示し、その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) はまず速度ベクトルを微分で求め、速さそのものではなく二乗を $c = \cos t$ の関数として整理する。 $-1 \leq c \leq 1$ 上の 3 次式の最大・最小を微分で調べればよい。(2) は 2 つの時刻で同じ点を通ると仮定し、 $c = \cos t$, $d = \cos u$ とおいて x 座標の等式を因数分解する。 $c = d$ の場合と $c + d + 1 = 0$ の場合を分け、余分な候補を除く。最後に唯一の重複点 $(-1, 0)$ を通る時刻で速度ベクトルを計算し、向きを図示できる形で列挙する。

【解答】

(1)

速度ベクトルは

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-2 \sin t - 2 \sin 2t, 2 \cos 2t)$$

である。 $c = \cos t$ とおくと、 $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, $\cos 2t = 2c^2 - 1$ より、速さの二乗は $(-2 \sin t - 2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2 = 4(1 - c^2)(1 + 2c)^2 + 4(2c^2 - 1)^2 = -16c^3 - 4c^2 + 16c + 8$ である。これを $F(c)$ とおく。 $-1 \leq c \leq 1$ で $F'(c) = -48c^2 - 8c + 16 = -8(2c - 1)(3c + 2)$ である。したがって調べる値は $c = -1$, $c = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{2}$, $c = 1$ である。それぞれ

$$F(-1) = 4, \quad F\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}, \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = 13, \quad F(1) = 4$$

となる。速さは速さの二乗の平方根であるから、最大値は $\sqrt{13}$ であり、最小値は $\sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ である。

(2) $c = \cos t$ とおくと $x = 2c + \cos 2t = 2c + 2c^2 - 1 = 2c^2 + 2c - 1$, $y = \sin 2t = 2c \sin t$ である。2 つの時刻 t, u で同じ点を通るとし、 $c = \cos t$, $d = \cos u$ とおく。 x 座標が等しいことから $2c^2 + 2c - 1 = 2d^2 + 2d - 1$ であり、 $(c - d)(c + d + 1) = 0$ を得る。

まず $c = d$ の場合を考える。異なる時刻で同じ余弦をもつなら、 $0 \leq t, u < 2\pi$ では $\sin u = -\sin t$ である。 y 座標も等しいためには $2c \sin t = 2c \sin u = -2c \sin t$ が必要なので $c \sin t = 0$ である。異なる時刻を与えるのは $c = 0$ のときで、このとき点は $(x, y) = (-1, 0)$ である。

次に $c + d + 1 = 0$ の場合を考える。すなわち $d = -1 - c$ である。 y 座標の等しさから $c \sin t = d \sin u$ である。両辺を 2 乗し、 $d = -1 - c$ と $\sin^2 t = 1 - c^2$, $\sin^2 u = 1 - d^2$ を用いると $c^2(1 - c^2) = d^2(1 - d^2)$ である。左辺から右辺を引いて整理すると $2c(c + 1)(2c + 1) = 0$ となる。 $c = -1/2$ は $d = c$ であり、異なる 2 時刻で同じ点を新しく与えない。 $c = 0$ または $c = -1$ のときは、いずれも $(x, y) = (-1, 0)$ である。

以上より、 $0 \leq t < 2\pi$ の間に 2 回以上通過する点はただ一つ $(-1, 0)$ である。この点を通る時刻は $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ である。

速度ベクトルは $(-2 \sin t - 2 \sin 2t, 2 \cos 2t)$ であるから、各時刻で $t = \frac{\pi}{2}$: $(-2, -2)$, $t = \pi$: $(0, 2)$, $t = \frac{3\pi}{2}$: $(2, -2)$ となる。図では点 $(-1, 0)$ に、左下向き、上向き、右下向きの 3 本の速度ベクトルをそれぞれ描けばよい。

▶ 解法 2

【方針】

(1) では微分後の速さの二乗を、最大値・最小値との差として完全に因数分解し、微分を使わずに両端を評価する。(2) では $c = \cos t$ による 2 枝表示を作り、同じ x をもつ 2 点と同じ y ももつ条件から自己交点だけを抽出する。

【解答】

(1)

$c = \cos t$ と置く。速度ベクトルは

$$(-2 \sin t - 2 \sin 2t, 2 \cos 2t)$$

であり、速さの二乗を $F(c)$ とすると

$$F(c) = -16c^3 - 4c^2 + 16c + 8 \quad (-1 \leq c \leq 1).$$

これは次の 2 通りに因数分解できる。

$$13 - F(c) = (2c - 1)^2(4c + 5) \geq 0,$$

$$F(c) - \frac{8}{27} = -\frac{4}{27}(3c + 2)^2(12c - 13) \geq 0.$$

後者では $12c - 13 < 0$ を用いた。等号はそれぞれ $c = 1/2$ 、 $c = -2/3$ で実現する。したがって速さの最大値は

$$\sqrt{13},$$

最小値は

$$\sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

である。

(2)

$c = \cos t$ とすると

$$x = 2c^2 + 2c - 1, \quad y = 2c \sin t.$$

同じ x を与える 2 つの余弦を c, d とすれば

$$(c - d)(c + d + 1) = 0.$$

$c = d$ で異なる時刻を取る場合、正弦の符号が逆になる。 y まで等しいためには $c \sin t = 0$ であり、新たな重複は $c = 0$ 、すなわち $(-1, 0)$ だけである。

$c + d + 1 = 0$ の場合は、 y の等式を 2 乗すると

$$c^2(1 - c^2) = d^2(1 - d^2).$$

$d = -1 - c$ を代入して

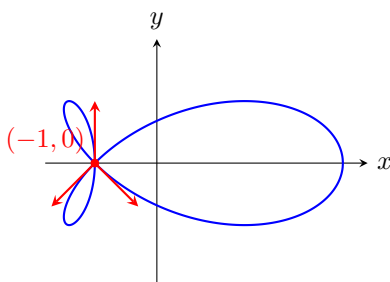
$$2c(c + 1)(2c + 1) = 0.$$

$c = -1/2$ は $c = d$ で新しい 2 時刻を与えず、 $c = 0, -1$ はいずれも $(-1, 0)$ を与える。よって重複点は唯一 $(-1, 0)$ である。

通過時刻と速度は

t	$(dx/dt, dy/dt)$
$\pi/2$	$(-2, -2)$
π	$(0, 2)$
$3\pi/2$	$(2, -2)$

となる。



【総評】 難度 7、計算量 7、目安 24～28 分。解法 1 は速さの二乗を微分し、解法 2 は最大・最小値との差を因数分解して同じ値を得た。自己交点では同じ x を与える $c = d$ と $c + d + 1 = 0$ を両方調べ、唯一の点 $(-1, 0)$ と 3 本の速度ベクトルを確認した。図は矢印の向きまで式と一致している。