

東京大学 1994 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

正の整数 m と $k = 1, 2, \dots, m$ に対して $0 \leq a_k \leq k$ を満たす整数 $a_1, \dots, a_m$ があたえられたときに

$$[a_m, a_{m-1}, \dots, a_1]_m = a_m \cdot m! + a_{m-1} \cdot (m-1)! + \dots + a_1 \cdot 1!$$

とおく. ただし $a_m \neq 0$ とする.

- (1) $[m, m-1, \dots, 1]_m = [1, 0, \dots, 0]_{m+1} - 1$ を証明せよ.
- (2) すべての正の整数は $[a_m, a_{m-1}, \dots, a_1]_m$ の形にただ一通りに表示できることを証明せよ.
- (3) n が 5 以上の整数のとき $\frac{n!}{5}$ を $[a_m, a_{m-1}, \dots, a_1]_m$ の形に表示せよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ で望遠和にする. (2) は最大の階乗から順に整数の除法を行い、存在と一意性を示す. (3) は $n = 5q + r$ と分け、同じ除法を上位桁から行う.

【解答】

(1)

$$[m, m-1, \dots, 1]_m = \sum_{k=1}^m k \cdot k! = \sum_{k=1}^m \{(k+1)! - k!\} = (m+1)! - 1$$

であるから、所要の等式が成り立つ.

(2) 正の整数 N に対し、 $m! \leq N < (m+1)!$ となる m を選ぶ. 整数の除法により

$$N = a_m m! + R_m, \quad 0 \leq R_m < m!$$

とする. 上の範囲から $1 \leq a_m \leq m$ である. 次に R_m を $(m-1)!$ で割り、この操作を $1!$ まで続けると

$$N = a_m m! + a_{m-1} (m-1)! + \dots + a_1 1!, \quad 0 \leq a_k \leq k$$

を得るので表示は存在する. 各段階の商と余りは整数の除法によりただ一通りであるから、表示も一意である.

(3) $n = 5q + r$ ($0 \leq r \leq 4$) とおく. 書いていない下位桁を 0 とすれば

$$\frac{n!}{5} = \begin{cases} [q, 0, \dots, 0]_{n-1}, & r = 0, \\ [q, q, 0, \dots, 0]_{n-1}, & r = 1, \\ [q, 2q, 2q, 0, \dots, 0]_{n-1}, & r = 2, \\ [q, 3q+1, q, q, 0, \dots, 0]_{n-1}, & r = 3, \\ [q, 4q+2, 2q, 4q, 4q, 0, \dots, 0]_{n-1}, & r = 4. \end{cases}$$

実際、 $n!/5 = (q + r/5)(n-1)!$ に (2) の除法を順に適用すればこの桁列を得る. 例えば $r = 3$ の下位への余りは $\frac{1}{5}(n-2)!, \frac{1}{5}(n-3)!, 0$ と続き、 $r = 4$ でも同様に計算できる. 各桁は対応する上限以下である.

▶ 解法 2

【方針】

階乗進法の桁上限を使って、存在は最大桁からの除法、一意性は最上位の相違から示す。(3) は $n = 5q + r$ とし、 r を下位桁へ送る。

【解答】

(1)

$$k \cdot k! = (k+1)! - k!$$

なので、 $k = 1, \dots, m$ について加えると

$$\sum_{k=1}^m k \cdot k! = (m+1)! - 1.$$

右辺は $[1, 0, \dots, 0]_{m+1} - 1$ である。

(2) $m! \leq N < (m+1)!$ を満たす m を選び、 N を $m!, (m-1)!, \dots, 1!$ で順に割る。各商を $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1$ とすれば、余りが次の階乗未満なので $0 \leq a_k \leq k$ となり、 $a_m \neq 0$ である。これで存在が分かる。

一意性は最上位の異なる桁を j とし、2つの表示の差では、第 j 桁の差の絶対値は少なくとも $j!$ である。一方、それより下の桁で打ち消せる最大値は (1) より

$$\sum_{k=1}^{j-1} k \cdot k! = j! - 1$$

にすぎない。矛盾だから表示は一意である。

(3) $n = 5q + r$ ($0 \leq r \leq 4$) とする。省略した末尾はすべて 0 と約束すれば

$$\frac{n!}{5} = \begin{cases} [q, 0, \dots, 0]_{n-1} & (r=0), \\ [q, q, 0, \dots, 0]_{n-1} & (r=1), \\ [q, 2q, 2q, 0, \dots, 0]_{n-1} & (r=2), \\ [q, 3q+1, q, q, 0, \dots, 0]_{n-1} & (r=3), \\ [q, 4q+2, 2q, 4q, 4q, 0, \dots, 0]_{n-1} & (r=4). \end{cases}$$

これは

$$\frac{n!}{5} = \left(q + \frac{r}{5}\right) (n-1)!$$

から始め、分数部分に $(n-1) = 5q + r - 1$ を掛けて次の桁へ送れば順に得られる。例えば $r = 4$ では分数部分の分子が

$$4, 2, 4, 4, 0$$

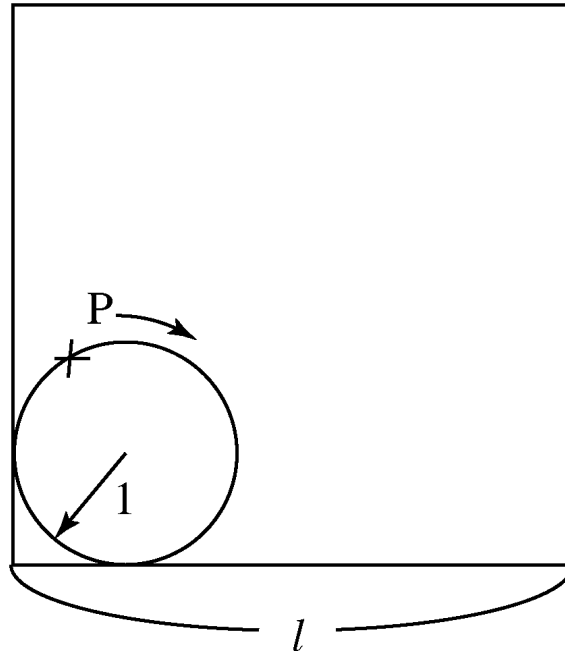
と移り、上の 5 桁になる。各桁はそれぞれの桁番号以下であり、(2) の一意性からこれが求める表示である。

【総評】 難度は 8、計算量は 7。階乗進法の桁上限、一意性、 $n \bmod 5$ の 5 場合を整数計算で照合した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 2 問】

一辺の長さが l の正方形の内部に半径 1 の円が入っている．ここで $l > 2$ とする．この円が図のように正方形の角から出発して正方形の辺にそってすべらずに正方形の内部をころがる．ただし円が正方形の他の辺に接すれば次にはその辺にそってすべらずにころがるとする．この円の中心が最初にもとの位置にもどってくるまでの円周上の点 P の軌跡を考える．

- (1) P の軌跡の始点と終点が一致するための l の条件を求めよ．
- (2) l は (1) の条件を満たす最小の長さとする．このとき P の軌跡の長さのとりうる値の範囲を求めよ．



▶ 解法 1

【方針】

中心軌跡の周長が円の回転角になる。(2) では各边上の点 P の速さを初期偏角で表し、向かい合う辺をまとめて、周期関数の長さ $\pi/4$ の区間積分の最大・最小へ帰着する。

【解答】

(1) 円の中心は一辺 $l - 2$ の正方形を一周する。半径 1 で滑らないから、円の総回転角は $4(l - 2)$ である。したがって始点と終点が一致する条件は

$$4(l - 2) = 2k\pi,$$

すなわち

$$l = 2 + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

である。

(2) 最小の場合は $l - 2 = \pi/2$ である。最初の辺の進行方向を角 0 とし、点 P への半径の初期偏角を γ とする。各辺で中心が s ($0 \leq s \leq \pi/2$) 進んだとき、第 1・第 3 辺での速さの 2 乗は $2 + 2\sin(\gamma - s)$ 、第 2・第 4 辺では $2 - 2\sin(\gamma - s)$ となる。よって全長 L は

$$L = 2 \int_0^{\pi/2} \{ \sqrt{2 + 2\sin(\gamma - s)} + \sqrt{2 - 2\sin(\gamma - s)} \} ds.$$

$u = \gamma - s$, $v = u/2$ とおくと

$$\sqrt{2 + 2\sin u} + \sqrt{2 - 2\sin u} = 2\sqrt{2} \max\{|\cos v|, |\sin v|\}.$$

したがって

$$L = 8\sqrt{2} \int_J \max\{|\cos v|, |\sin v|\} dv,$$

ただし J は長さ $\pi/4$ の区間である。被積分関数の周期は $\pi/2$ である。最大点を J の中央に置くと積分は最大、最小点を中央に置くと最小になるから

$$L_{\max} = 8\sqrt{2} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos v \, dv = 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}},$$

$$L_{\min} = 8\sqrt{2} \left(\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos v \, dv + \int_{\pi/4}^{3\pi/8} \sin v \, dv \right) = 16 - 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

初期位置を連続的に変えれば中間値もすべてとる。よって

$$16 - 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \leq L \leq 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

▶ 解法 2

【方針】

円周上の点を複素数で表し、中心の並進速度と円の回転速度の和から速さを得る。4 辺の対称性で 1 つの周期積分にまとめ、区間の位置で極値を決める。

【解答】

(1) 円の中心は一辺 $l-2$ の正方形を 1 周する。半径が 1 で滑らないため、円の回転角は移動距離に等しく、1 周で $4(l-2)$ である。したがって点 P まで元の位置に戻る必要十分条件は

$$4(l-2) = 2k\pi \quad (k = 1, 2, \dots),$$

すなわち

$$l = 2 + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

(2) 最小の場合は $l-2 = \pi/2$ である。各辺上の移動距離を $0 \leq s \leq \pi/2$ 、半径 CP の初期偏角を γ とする。複素平面上で $P = C + e^{i(\gamma-s)}$ と書けば、辺の向きに応じて C' は $1, i, -1, -i$ のいずれかである。したがって向かい合う辺を組にした速さは

$$\sqrt{2 + 2\sin(\gamma-s)}, \quad \sqrt{2 - 2\sin(\gamma-s)}$$

となる。全長 L は

$$L = 2 \int_0^{\pi/2} \left\{ \sqrt{2 + 2\sin(\gamma-s)} + \sqrt{2 - 2\sin(\gamma-s)} \right\} ds.$$

ここで $v = (\gamma-s)/2$ と置くと

$$L = 8\sqrt{2} \int_J \max\{|\cos v|, |\sin v|\} dv,$$

J は長さ $\pi/4$ の区間である。被積分関数は周期 $\pi/2$ で、各周期の最大点を区間中央に置くと積分は最大、最小点を中央に置くと最小になる。よって

$$L_{\max} = 8\sqrt{2} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos v \, dv = 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}},$$

$$L_{\min} = 8\sqrt{2} \left(\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos v \, dv + \int_{\pi/4}^{3\pi/8} \sin v \, dv \right)$$

$$= 16 - 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

γ に関して L は連続だから、中間の値もすべて取る。したがって

$$16 - 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \leq L \leq 8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

【総評】 難度は 9、計算量は 8。原問題図を復元し、回転角の必要十分性と軌跡長の連続な値域を数値積分でも照合した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 3 問】

ある会社である工事を受注した。その工事はまず第 1 工程、第 2 工程、検査の順に行い、3 つの作業はそれぞれ 1 日を必要とする。検査では第 1 工程、第 2 工程に欠陥があるかないかがわかる。検査の結果第 1 工程に欠陥があれば、工事は第 1 工程、第 2 工程ともやり直し、改めて検査をする。第 1 工程に欠陥がなく第 2 工程のみに欠陥があれば、第 2 工程のみやり直して検査する。これらの作業は日曜日を除いて引き続いて行い、検査の結果第 1, 第 2 工程ともに欠陥がなければ工事は終了する。各工程ではそれまでの経過とは独立に確率 p で欠陥が発生するものとする。月曜日から工事を始めた場合 n 週間以内にその工事が終了する確率を $P(n)$ とする。

- (1) $P(1)$ を求めよ。
- (2) $P(n)$ を求めよ。
- (3) $p = \frac{1}{2}$ のとき $1 - P(n) < \frac{1}{1000}$ を満たす最小の正整数 n を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

n 週間を $6n$ 作業日と数える。両工程のやり直し回数を j 、第 2 工程だけのやり直し回数を i とし、所要日数 $3 + 2i + 3j$ と確率を数える。

【解答】

$q = 1 - p$ とおく。第 1 工程の欠陥により両工程をやり直す回数を j 、第 2 工程だけをやり直す回数を i とする。この後に両工程が合格する確率は $q^2 p^{i+j}$ 、作業日数は $3 + 2i + 3j$ である。

- (1) 1 週間は 6 作業日なので、可能な (i, j) は $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ である。よって

$$P(1) = q^2(1 + 2p) = 1 - 3p^2 + 2p^3.$$

- (2)

$$P(n) = q^2 \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ 2i + 3j \leq 6n - 3}} p^{i+j}.$$

$j = 0, \dots, 2n - 1$ として内側の等比数列を足し、 $j = 2k, 2k + 1$ を組にすると、打ち切られる項の指数はいずれも $3n - 1 - k$ となる。したがって

$$P(n) = 1 - p^{2n} - 2p^{2n}(1 - p^n) = 1 - 3p^{2n} + 2p^{3n}.$$

- (3) $p = 1/2$ のとき

$$1 - P(n) = \frac{3}{4^n} - \frac{2}{8^n}.$$

$n = 5$ では $47/16384 > 1/1000$ 、 $n = 6$ では $95/131072 < 1/1000$ であり、この値は n とともに減少する。よって最小の正整数は $n = 6$ である。

▶ 解法 2

【方針】

第 1 工程が不良となる回数と、第 1 工程合格後に第 2 工程だけを直す回数を独立な幾何分布として扱う。所要作業日数の条件を数え上げる。

【解答】

$q = 1 - p$ とする。第 1 工程が不良となって全工程をやり直す回数を J 、第 1 工程が合格した後に第 2 工程だけをやり直す回数を I とする。独立性から

$$\Pr(J = j, I = i) = q^2 p^{i+j} \quad (i, j \geq 0).$$

作業日数は

$$T = 3(J + 1) + 2I$$

である。

(1) 6 作業日以内では $(I, J) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ が可能なので

$$P(1) = q^2(1 + 2p) = 1 - 3p^2 + 2p^3.$$

(2)

$$P(n) = q^2 \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ 2i + 3j \leq 6n - 3}} p^{i+j}.$$

$j = 0, \dots, 2n - 1$ として i の等比和を取り、 $j = 2k$ と $j = 2k + 1$ を組にすると

$$P(n) = 1 - 3p^{2n} + 2p^{3n}.$$

確認として $n = 1$ を代入すると (1) と一致する。また

$$P(n + 1) - P(n) = p^{2n}(1 - p)\{3(1 + p) - 2p^n(1 + p + p^2)\} > 0$$

であり、週数とともに確率が増えることとも整合する。

(3) $p = 1/2$ のとき

$$1 - P(n) = \frac{3}{4^n} - \frac{2}{8^n}.$$

$$1 - P(5) = \frac{47}{16384} > \frac{1}{1000}, \quad 1 - P(6) = \frac{95}{131072} < \frac{1}{1000}.$$

上式は n とともに減少するので、最小の正整数は

$$n = 6$$

である。

【総評】 難度は 8、計算量は 8。日曜を除く 1 週 6 作業日、2 種類のやり直し日数、幾何分布の独立性を照合した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。