

入 学 試 験 問 題



数 学

東 京 大 学 1994 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$$f(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}, \quad g(x) = x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x + \frac{1}{120}$$

とする。このとき、以下のことが成り立つことを示せ。

- (1) 任意の実数 x に対し、 $f(x) > 0$ である。
- (2) 方程式 $g(x) = 0$ はただひとつの実数解 α をもち、 $-1 < \alpha < 0$ となる。

第 2 問

$$a = \sin^2 \frac{\pi}{5}, \quad b = \sin^2 \frac{2\pi}{5}$$

とおく。このとき、以下のことが成り立つことを示せ。

- (1) $a + b$ および ab は有理数である。
- (2) 任意の自然数 n に対し $(a^{-n} + b^{-n})(a + b)^n$ は整数である。

第 3 問

xyz 空間において条件

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad z^2 \leq x, \quad 0 \leq z \leq 1$$

を満たす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積を V とし、 $0 \leq k \leq 1$ に対し、 z 軸と直交する平面 $z = k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする。

- (1) $k = \cos \theta$ とおくとき $S(k)$ を θ で表せ。ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。
- (2) V の値を求めよ。

第 4 問

$0 < c < 1$ とする。 $0 \leq x < 1$ において連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t) dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t) dt$$

とおく。以下、関数 $f_3(x), f_4(x), \dots$ を順次

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t) dt \quad (n = 3, 4, \dots)$$

により定める。また、

$$g(c) = \int_0^c f(t) dt$$

とし、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$g_n(c) = \int_0^c f_n(t) dt$$

とおく。このとき、 $0 < x < 1$ を満たす任意の x に対し

$$xf(x) = g(x) + x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

が成り立ち、さらに $f(0) = 1$ となるような $f(x)$ を定めよ。

第 5 問

大量のカードがあり、各々のカードに $1, 2, 3, 4, 5, 6$ の数字のいずれかの一つが書かれている。これらのカードから無作為に 1 枚をひくとき、どの数字のカードをひく確率も正である。さらに、3 の数字のカードをひく確率は p であり、 $1, 2, 5, 6$ の数字のカードをひく確率はそれぞれ q に等しいとする。

これらのカードから 1 枚をひき、その数字 a を記録し、このカードをもとに戻して、もう 1 枚ひき、その数字を b とする。このとき、 $a + b \leq 4$ となる事象を A 、 $a < b$ となる事象を B とし、それぞれのおこる確率を $P(A)$ 、 $P(B)$ と書く。

- (1) $E = 2P(A) + P(B)$ とおくとき、 E を p 、 q で表せ。
- (2) $\frac{1}{p}$ と $\frac{1}{q}$ がともに自然数であるとき、 E の値を最大にするような p 、 q を求めよ。

第 6 問

xy 平面上の 2 点 P, Q に対し, P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(P, Q)$ で表す。

- (1) 原点 $O(0, 0)$ と点 $A(1, 1)$ に対し, $d(O, P) = d(P, A)$ を満たす点 $P(x, y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。
- (2) 実数 $a \geq 0$ に対し, 点 $Q(a, a^2 + 1)$ を考える。次の条件を満足する点 $P(x, y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。
- (*) 原点 $O(0, 0)$ に対し, $d(O, P) = d(P, Q)$ となるような $a \geq 0$ が存在する。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)