

東京大学 1994 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$$f(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}, \quad g(x) = x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x + \frac{1}{120}$$

とする。このとき、以下のことが成り立つことを示せ。

- (1) 任意の実数 x に対し、 $f(x) > 0$ である。
- (2) 方程式 $g(x) = 0$ はただひとつの実数解 α をもち、 $-1 < \alpha < 0$ となる。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $f(x)$ を平方の和と正の定数に分解して、任意の実数で正であることを示す。(2) は $g'(x)$ を平方の和と正の定数に分解し、 g が実数全体で単調増加であることを示す。あとは $g(-1) < 0 < g(0)$ を直接計算し、中間値と単調性から、解の存在・一意性・範囲 $-1 < \alpha < 0$ を同時に結論する。

【解答】

(1)

平方完成を行うと

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{72}$$

である。実際、右辺を展開すると

$$x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}$$

となり、 $f(x)$ と一致する。

右辺の 2 つの平方は 0 以上であり、最後に $1/72$ が加わっている。したがって任意の実数 x に対して $f(x) > 0$ である。

(2) g を微分すると $g'(x) = 5x^4 + 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}$ である。これも平方完成により

$$g'(x) = 5\left(x^2 + \frac{2}{5}x\right)^2 + \frac{7}{10}\left(x + \frac{5}{21}\right)^2 + \frac{1}{504}$$

と書ける。展開して確認すると、 x^2 の係数は $4/5 + 7/10 = 3/2$ 、 x の係数は $7/10 \cdot 10/21 = 1/3$ 、定数項は $5/126 + 1/504 = 1/24$ である。

したがって任意の実数 x に対して $g'(x) > 0$ であり、 $g(x)$ は実数全体で単調に増加する。

端点の値を調べると $g(-1) = -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = -\frac{11}{30} < 0$ であり、また $g(0) = \frac{1}{120} > 0$ である。よって連続性により、 $-1 < x < 0$ に $g(x) = 0$ を満たす実数解が少なくとも一つ存在する。

さらに $g(x)$ は単調に増加するので、実数解は二つ以上存在できない。したがって方程式 $g(x) = 0$ はただ一つの実数解 α をもち、その解は $-1 < \alpha < 0$ を満たす。

▶ 解法 2

【方針】

正の側と負の側を分け、負の側では $t = -x$ として正定値な 2 次式に分解する。導関数にも同じ方法を使い、平方完成とは別の符号判定で単調性を得る。

【解答】

(1) $x \geq 0$ では $f(x)$ の各項が正なので明らかである。 $x < 0$ では $t = -x > 0$ とおくと

$$f(-t) = t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{6t^2 - 4t + 1}{24}.$$

第 2 項の分子は、判別式が

$$(-4)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = -8 < 0$$

で最高次係数が正だから常に正である。ゆえに $f(x) > 0$ はすべての実数で成り立つ。

(2) $x \geq 0$ では $g'(x)$ の各項が正である。 $x = -t < 0$ では

$$g'(-t) = t^2 \left(5t^2 - 4t + \frac{4}{5} \right) + \left(\frac{7}{10}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{24} \right).$$

第 1 の括弧は $5(t - 2/5)^2$ である。第 2 の括弧も、判別式が

$$\frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{24} = -\frac{1}{180} < 0$$

で最高次係数が正だから常に正である。したがって $g'(x) > 0$ は実数全体で成り立ち、 g は狭義単調増加である。

さらに

$$g(-1) = -\frac{11}{30} < 0, \quad g(0) = \frac{1}{120} > 0.$$

中間値の定理から $(-1, 0)$ に零点が存在し、狭義単調増加性からそれはただ 1 つである。

【総評】 難度は 6、計算量は 5。 $g(-1) = -11/30$ を再計算し、導関数の正值性を 2 通りの分解で照合した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 2 問】

$$a = \sin^2 \frac{\pi}{5}, \quad b = \sin^2 \frac{2\pi}{5}$$

とおく。このとき、以下のことが成り立つことを示せ。

- (1) $a + b$ および ab は有理数である。
- (2) 任意の自然数 n に対し $(a^{-n} + b^{-n})(a + b)^n$ は整数である。

▶ 解法 1

【方針】

$\sin 5\theta = 0$ を $\sin \theta$ で割り、 $\sin^2 \theta$ についての 2 次方程式を作る。 $\theta = \pi/5, 2\pi/5$ を代入すると、 a, b がその 2 根になるので、解と係数の関係から $a + b$ と ab を求める。(2) では $r = (a + b)/a$, $s = (a + b)/b$ とおくと、 $r + s$ と rs がともに整数になる。すると $U_n = r^n + s^n$ が整数係数の漸化式を満たすため、帰納法で整数性が示せる。別解として、 a, b を根号で表して共役な形から同じ漸化式へ戻す方法もある。

【解答】

(1)

公式 $\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$ を用いる。 $\sin 5\theta = 0$ かつ $\sin \theta \neq 0$ のとき、 $\sin \theta$ で割って $16 \sin^4 \theta - 20 \sin^2 \theta + 5 = 0$ を得る。 $\theta = \pi/5, 2\pi/5$ はいずれも $\sin 5\theta = 0$, $\sin \theta \neq 0$ を満たす。したがって $a = \sin^2 \frac{\pi}{5}$, $b = \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ は、2 次方程式 $16X^2 - 20X + 5 = 0$ の 2 根である。よって解と係数の関係から $a + b = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$, $ab = \frac{5}{16}$ であり、どちらも有理数である。

(2) $r = \frac{a+b}{a}$, $s = \frac{a+b}{b}$ とおく。このとき $r+s = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(a+b)^2}{ab}$ であり, (1) の結果を代入して $r+s = \frac{(5/4)^2}{5/16} = 5$ である。また $rs = \frac{(a+b)^2}{ab} = 5$ でもある。 $U_n = r^n + s^n$ とおく。 r, s は 2 次方程式 $X^2 - 5X + 5 = 0$ の 2 根であるから $r^2 = 5r - 5$, $s^2 = 5s - 5$ である。両辺にそれぞれ r^{n-2} , s^{n-2} を掛けて足すと, $n \geq 3$ について $U_n = 5U_{n-1} - 5U_{n-2}$ が成り立つ。

初項は $U_1 = r+s = 5$, $U_2 = (r+s)^2 - 2rs = 25 - 10 = 15$ で, いずれも整数である。漸化式の係数も整数なので, 数学的帰納法により, すべての自然数 n について U_n は整数である。

一方,

$$U_n = \left(\frac{a+b}{a}\right)^n + \left(\frac{a+b}{b}\right)^n = (a^{-n} + b^{-n})(a+b)^n$$

である。したがって求める数は整数である。

▶ 解法 2

【方針】

a, b を 2 次方程式の根として明示し, 求める式を互いに共役な 2 数のべき和へ変換する。整数係数の漸化式により整数性を示す。

【解答】

(1) $\sin 5\theta = 0$ を用いると, a, b は

$$16X^2 - 20X + 5 = 0$$

の 2 根である。これを解けば

$$a = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}, \quad b = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}.$$

よって

$$a+b = \frac{5}{4}, \quad ab = \frac{5}{16}.$$

(2)

$$r = \frac{a+b}{a}, \quad s = \frac{a+b}{b}$$

とおけば

$$r = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \quad s = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

したがって r, s は $X^2 - 5X + 5 = 0$ の 2 根である。べき和

$$U_n = r^n + s^n$$

は

$$U_n = 5U_{n-1} - 5U_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

を満たす。ただし $U_0 = 2$, $U_1 = 5$ は整数であるから, 帰納法によりすべての n で U_n は整数である。一方

$$U_n = \left(\frac{a+b}{a}\right)^n + \left(\frac{a+b}{b}\right)^n = (a^{-n} + b^{-n})(a+b)^n.$$

よって問題の数は整数である。自然数を $1, 2, \dots$ とする流儀でも, $n = 1$ から同じ結論になる。

【総評】 難度は 6、計算量は 5。5 倍角公式、解と係数の関係、整数係数漸化式の初期値を照合した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 3 問】

xyz 空間において条件

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad z^2 \leq x, \quad 0 \leq z \leq 1$$

を満たす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積を V とし、 $0 \leq k \leq 1$ に対し、 z 軸と直交する平面 $z = k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする。

- (1) $k = \cos \theta$ とおくととき $S(k)$ を θ で表せ。ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。
- (2) V の値を求めよ。

▶ 解法 1
【方針】

高さ $z = k$ で切ると、切り口は xy 平面で円 $x^2 + y^2 \leq k^2$ と半平面 $x \geq k^2$ の共通部分になる。半径は k 、中心から弦までの距離は k^2 なので、 $k = \cos \theta$ とおけば扇形の中心角が 2θ になる。(1) は扇形から二等辺三角形を引いて $S(k)$ を出す。(2) は

$$V = \int_0^1 S(k) dk$$

とし、 $k = \cos \theta$ で積分する。途中の部分積分を省くと誤りやすいので、

$$\int \theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

を丁寧に処理する。

【解答】

(1) $z = k$ で切る。 $0 \leq k \leq 1$ に対し、条件は $x^2 + y^2 \leq k^2$ 、 $k^2 \leq x$ となる。したがって切り口は、半径 k の円板のうち、直線 $x = k^2$ の右側の部分である。 $k = \cos \theta$ とおく。中心から直線 $x = k^2$ までの距離は k^2 であり、半径は k であるから $\frac{k^2}{k} = k = \cos \theta$ である。したがって、弦を見込む中心角は 2θ である。

求める切り口は、中心角 2θ の扇形から、2 辺が半径 k でその間の角が 2θ の二等辺三角形を除いた部分である。よって

$$S(k) = \frac{1}{2}k^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2}k^2 \sin 2\theta = k^2\theta - k^2 \sin \theta \cos \theta$$

である。 $k = \cos \theta$ より $S(k) = \cos^2 \theta (\theta - \sin \theta \cos \theta)$ である。

(2)

体積は切り口の面積を高さ方向に積分して

$$V = \int_0^1 S(k) dk$$

である。 $k = \cos \theta$ とおくと、 $dk = -\sin \theta d\theta$ であり、 $k = 0$ のとき $\theta = \pi/2$ 、 $k = 1$ のとき $\theta = 0$ である。したがって

$$V = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta (\theta - \sin \theta \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

である。

第 1 項を

$$I = \int_0^{\pi/2} \theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

とおく。 $d(\cos^3 \theta) = -3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$ であるから、部分積分により

$$I = \left[-\frac{1}{3} \theta \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta$$

である。端の項は 0 であり、

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

だから $I = \frac{2}{9}$ である。

第 2 項は

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta$$

である。 $u = \sin \theta$ とおくと

$$J = \int_0^1 u^2(1-u^2) du = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

である。

よって $V = I - J = \frac{2}{9} - \frac{2}{15} = \frac{4}{45}$ である。

▶ 解法 2

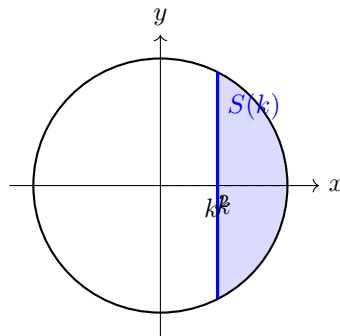
【方針】

円弧部分を縦に細分して切り口面積を積分表示し、体積の二重積分の順序を交換する。扇形公式を使わずに値を求める。

【解答】

(1) $z = k$ では $k^2 \leq x \leq k$ であり、各 x に対する縦の長さは $2\sqrt{k^2 - x^2}$ である。したがって

$$S(k) = 2 \int_{k^2}^k \sqrt{k^2 - x^2} dx.$$



$x = k \cos \varphi$ とおけば、 $x = k^2$ は $\varphi = \theta$ 、 $x = k$ は $\varphi = 0$ に対応するので

$$S(k) = 2k^2 \int_0^\theta \sin^2 \varphi d\varphi = k^2(\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

よって

$$S(k) = \cos^2 \theta(\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

(2) 上の積分で $x = ku$ と置くと

$$S(k) = 2k^2 \int_k^1 \sqrt{1-u^2} du.$$

したがって、積分領域 $0 \leq k \leq u \leq 1$ で順序を交換して

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 k^2 \int_k^1 \sqrt{1-u^2} du dk \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \left(\int_0^u k^2 dk \right) du \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 u^3 \sqrt{1-u^2} du. \end{aligned}$$

$w = 1 - u^2$ とおけば

$$\int_0^1 u^3 \sqrt{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-w) \sqrt{w} dw = \frac{2}{15}.$$

ゆえに

$$V = \frac{4}{45}.$$

【総評】 難度は 6、計算量は 6。円弧部分の面積公式と積分順序交換の 2 経路で $V = 4/45$ を照合した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 4 問】

$0 < c < 1$ とする。 $0 \leq x < 1$ において連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t) dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t) dt$$

とおく。以下、関数 $f_3(x), f_4(x), \dots$ を順次

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t) dt \quad (n = 3, 4, \dots)$$

により定める。また、

$$g(c) = \int_0^c f(t) dt$$

とし、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$g_n(c) = \int_0^c f_n(t) dt$$

とおく。このとき、 $0 < x < 1$ を満たす任意の x に対し

$$xf(x) = g(x) + x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

が成り立ち、さらに $f(0) = 1$ となるような $f(x)$ を定めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず上端を固定して、 $g_n(c)$ だけの漸化式を作る。定義より $g_n(c) = g(c) + cg_{n-1}(c)$ となるので、 $0 < c < 1$ から $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = g(c)/(1-c)$ を得る。これを条件式に代入し、 $x(1-x)f(x) = g(x)$ へ変形する。さらに $g'(x) = f(x)$ を使い、 $x(1-x)g'(x) = g(x)$ を解く。割り算で $g(x)$ の符号を仮定しなくてすむよう、 $(1-x)g(x)/x$ が一定であることを直接微分して示す。最後に $f(0) = 1$ から定数を決め、代入確認を行う。

【解答】

$0 < c < 1$ を固定する。定義から

$$g_n(c) = \int_0^c f_n(t) dt = \int_0^c \left\{ f(t) + \int_0^c f_{n-1}(u) du \right\} dt$$

である。内側の積分は t によらない定数なので

$$g_n(c) = g(c) + c \int_0^c f_{n-1}(u) du = g(c) + cg_{n-1}(c)$$

となる。

したがって $g_n(c) = g(c)(1 + c + \dots + c^{n-1})$ であり、 $0 < c < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = \frac{g(c)}{1-c}$ である。

問題の条件に $c = x$ としてこの極限を代入すると、 $0 < x < 1$ で $xf(x) = g(x) + x \frac{g(x)}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$ である。よって $x(1-x)f(x) = g(x)$ を得る。

ここで

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

だから $g'(x) = f(x)$ である。したがって $x(1-x)g'(x) = g(x)$ ($0 < x < 1$) である。 $0 < x < 1$ で $H(x) = \frac{1-x}{x}g(x)$ とおく。上の式を用いて微分すると

$$H'(x) = \frac{1-x}{x}g'(x) - \frac{1}{x^2}g(x) = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{g(x)}{x(1-x)} - \frac{g(x)}{x^2} = 0$$

である。よって $H(x)$ は定数であり、ある定数 C を用いて $\frac{1-x}{x}g(x) = C$ と書ける。すなわち $g(x) = \frac{Cx}{1-x}$ である。

したがって $f(x) = g'(x) = \frac{C}{(1-x)^2}$ である。 $f(0) = 1$ より $C = 1$ だから $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ ($0 \leq x < 1$) である。

最後に確認する。この f に対して

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{x}{1-x}$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \frac{g(x)}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$ である。すると

$$g(x) + x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} = xf(x)$$

となり、確かに条件を満たす。

▶ 解法 2

【方針】

極限から得られる積分方程式を微分し、 $(1-x)^2 f(x)$ の導関数が 0 になることを直接示す。対数積分や f での割り算を避ける。

【解答】

まず固定した c について

$$g_n(c) = g(c) + cg_{n-1}(c)$$

である。これを繰り返すと

$$g_n(c) = g(c)(1 + c + \cdots + c^{n-1}),$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = \frac{g(c)}{1-c}.$$

条件式に $c = x$ を代入すれば

$$xf(x) = \frac{g(x)}{1-x},$$

すなわち

$$g(x) = x(1-x)f(x).$$

左辺は微分可能なので、 $0 < x < 1$ で右辺も微分できる。 $g'(x) = f(x)$ を用いて微分すると

$$f(x) = (1-2x)f(x) + x(1-x)f'(x).$$

よって

$$(1-x)f'(x) = 2f(x).$$

ここで

$$\frac{d}{dx} \{(1-x)^2 f(x)\} = (1-x)\{(1-x)f'(x) - 2f(x)\} = 0.$$

したがって $(1-x)^2 f(x) = C$ である。 f は $x = 0$ で連続し、 $f(0) = 1$ だから $C = 1$ となる。ゆえに

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (0 \leq x < 1).$$

この関数では $g(x) = x/(1-x)$ となり、元の条件への代入でも等式が成立する。

【総評】 難度は 8、計算量は 6。極限を取る変数と積分上端を区別し、得られた関数を元の式へ代入確認した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 5 問】

大量のカードがあり、各々のカードに 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字のいずれかの一つが書かれている。これらのカードから無作為に 1 枚をひくとき、どの数字のカードをひく確率も正である。さらに、3 の数字のカードをひく確率は p であり、1, 2, 5, 6 の数字のカードをひく確率はそれぞれ q に等しいとする。

これらのカードから 1 枚をひき、その数字 a を記録し、このカードをもとに戻して、もう 1 枚ひき、その数字を b とする。このとき、 $a + b \leq 4$ となる事象を A 、 $a < b$ となる事象を B とし、それぞれのおこる確率を $P(A)$ 、 $P(B)$ と書く。

- (1) $E = 2P(A) + P(B)$ とおくとき、 E を p 、 q で表せ。
 (2) $\frac{1}{p}$ と $\frac{1}{q}$ がともに自然数であるとき、 E の値を最大にするような p 、 q を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

4 のカードを引く確率を $r = 1 - p - 4q$ とおき、まず A と B を直接数える。 A は和が 4 以下になる 6 通りを列挙する。 B は独立に 2 回引くので、異なる数字が出る確率の半分として $P(B)$ を求める。(2) では $p = 1/m$ 、 $q = 1/n$ とおく。正の確率条件から $p + 4q < 1$ 、したがって $n \geq 5$ である。 $n = 5$ を先に処理し、 $n \geq 6$ では $q < 1/8$ と $1/8 \leq q \leq 1/6$ に分けて上界を作り、候補 $p = 1/6$ 、 $q = 1/5$ を超えないことを示す。

【解答】

(1)

1, 2, 5, 6 のカードを引く確率はそれぞれ q 、3 のカードを引く確率は p である。したがって 4 のカードを引く確率は $r = 1 - p - 4q$ である。 $a + b \leq 4$ となるのは (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1) の場合である。よって $P(A) = q^2 + q^2 + q^2 + q^2 + pq + pq = 4q^2 + 2pq$ である。

次に B を求める。2 回の数字が異なるとき、 $a < b$ と $a > b$ は対称に起こる。したがって $P(B) = \frac{1}{2}P(a \neq b)$ である。2 回の数字が等しい確率は $4q^2 + p^2 + r^2$ であるから $P(B) = \frac{1}{2}\{1 - 4q^2 - p^2 - (1 - p - 4q)^2\}$ である。

したがって $E = 2P(A) + P(B)$ は $E = 2(4q^2 + 2pq) + \frac{1}{2}\{1 - 4q^2 - p^2 - (1 - p - 4q)^2\}$ である。展開すると $E = p - p^2 + 4q - 2q^2$ である。

(2) $1/p$ と $1/q$ が自然数なので $p = \frac{1}{m}$ 、 $q = \frac{1}{n}$ とおける。ただし m, n は自然数である。4 のカードの確率が正であることから $1 - p - 4q > 0$ であり、特に $4q < 1$ である。よって $n \geq 5$ である。

まず $n = 5$ 、すなわち $q = 1/5$ の場合を考える。このとき $p < 1/5$ なので $m \geq 6$ である。 $0 < p < 1/2$ では $p - p^2$ は増加するから、 $m \geq 6$ の中では $m = 6$ 、すなわち $p = 1/6$ のとき最大になる。このとき $E = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} + \frac{4}{5} - \frac{2}{25} = \frac{773}{900}$ である。

次に $n \geq 6$ とする。このとき $q \leq 1/6$ である。 $q < 1/8$ の場合、 $p - p^2 \leq 1/4$ であり、また $4q - 2q^2$ は $0 < q < 1/8$ で増加するので $4q - 2q^2 < 4 \cdot \frac{1}{8} - 2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{15}{32}$ である。したがって $E < \frac{1}{4} + \frac{15}{32} = \frac{23}{32} < \frac{773}{900}$ である。 $1/8 \leq q \leq 1/6$ の場合、 $p < 1 - 4q \leq 1/2$ である。 $0 < p < 1/2$ で $p - p^2$ は増加するから $p - p^2 < (1 - 4q) - (1 - 4q)^2 = 4q - 16q^2$ である。よって $E < 8q - 18q^2$ である。関数 $8q - 18q^2$ は $1/8 \leq q \leq 1/6$ で増加するので $E < 8 \cdot \frac{1}{6} - 18 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} < \frac{773}{900}$ である。

以上より、 $n \geq 6$ では $E = 773/900$ を超えない。したがって E を最大にするのは $p = \frac{1}{6}$ 、 $q = \frac{1}{5}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は順序対を直接数える。(2) は $q = 1/n$ ごとに許される最大の $p = 1/m$ を選び、少数の境界候補と単調な上界に分けて離散条件を処理する。

【解答】

(1) 4 のカードの確率を $r = 1 - p - 4q$ とする。 A に属する順序対は

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1)$$

だから

$$P(A) = 4q^2 + 2pq.$$

また、独立同分布な 2 回の抽出では $a < b$ と $a > b$ は同確率である。したがって

$$P(B) = \frac{1}{2} \{1 - (4q^2 + p^2 + r^2)\}.$$

整理して

$$E = p - p^2 + 4q - 2q^2.$$

(2) $p = 1/m$, $q = 1/n$ とする。 $r > 0$ より $n \geq 5$ である。固定した q のもとでは、 $0 < p < 1/2$ の範囲で $p - p^2$ は増加する。

$n = 5$ では $p < 1/5$ なので最大の候補は $p = 1/6$ であり

$$E = \frac{773}{900}.$$

$n = 6, 7, 8$ では、それぞれ許される最大の p は

$$\begin{array}{c|ccc} n & 6 & 7 & 8 \\ \hline p & 1/4 & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

である。代入値はいずれも $773/900$ より小さい。

$n \geq 9$ では $q \leq 1/9$ であり

$$p - p^2 \leq \frac{1}{4}, \quad 4q - 2q^2 \leq \frac{4}{9} - \frac{2}{81} = \frac{34}{81}.$$

ゆえに

$$E \leq \frac{1}{4} + \frac{34}{81} = \frac{217}{324} < \frac{773}{900}.$$

したがって最大にする組は

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{1}{5}$$

である。このとき $r = 1/30 > 0$ なので、すべての数字の確率が正という条件も満たす。

【総評】 難度は 7、計算量は 6。4 のカードの確率 $1 - p - 4q > 0$ と逆数の離散条件を含め、候補を全域で比較した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 6 問】

xy 平面上の 2 点 P, Q に対し、 P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(P, Q)$ で表す。

- (1) 原点 $O(0, 0)$ と点 $A(1, 1)$ に対し、 $d(O, P) = d(P, A)$ を満たす点 $P(x, y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。
 - (2) 実数 $a \geq 0$ に対し、点 $Q(a, a^2 + 1)$ を考える。次の条件を満足する点 $P(x, y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。
- (*) 原点 $O(0, 0)$ に対し、 $d(O, P) = d(P, Q)$ となるような $a \geq 0$ が存在する。

▶ 解法 1

【方針】

折れ線距離は絶対値の和で表される。(1) は $|x| + |y| = |x - 1| + |y - 1|$ を、 $x = 0, 1$ と $y = 0, 1$ で式が変わることに注意して整理する。(2) では、まず $a \geq 0$ を固定し、 $Q = (a, a^2 + 1)$ に対する等距離集合を求める。 $a^2 + 1 > a$ なので、固定した a での軌跡は左水平半直線、中央の斜め線分、右水平半直線の 3 部分になる。最後に a を動かして合併し、 $x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1/2$, $x \geq 1/2$ に分けて下端を求める。

【解答】

(1) $P = (x, y)$ とする。条件は $|x| + |y| = |x - 1| + |y - 1|$ である。 $\phi(x) = |x| - |x - 1|$, $\psi(y) = |y| - |y - 1|$ とおくと、条件は $\phi(x) + \psi(y) = 0$ である。ここで

$$\phi(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq 0), \\ 2x - 1 & (0 \leq x \leq 1), \\ 1 & (x \geq 1), \end{cases} \quad \psi(y) = \begin{cases} -1 & (y \leq 0), \\ 2y - 1 & (0 \leq y \leq 1), \\ 1 & (y \geq 1) \end{cases}$$

である。 $x \leq 0$ では $\phi(x) = -1$ なので $\psi(y) = 1$, すなわち $y \geq 1$ である。 $0 \leq x \leq 1$ では $\psi(y) = 1 - 2x$ であり、 $0 \leq y \leq 1$ の式から $y = 1 - x$ である。 $x \geq 1$ では $\phi(x) = 1$ なので $\psi(y) = -1$, すなわち $y \leq 0$ である。

よって求める範囲は $\{(x, y) \mid x \leq 0, y \geq 1\}$ と $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1 - x\}$ と $\{(x, y) \mid x \geq 1, y \leq 0\}$ の和集合である。

(2) $a \geq 0$ を固定する。点 $Q = (a, a^2 + 1)$ に対する条件は $|x| + |y| = |x - a| + |y - (a^2 + 1)|$ である。ここで $b = a^2 + 1$ とおくと、 $b - a = a^2 - a + 1 > 0$ である。 $\phi_a(x) = |x| - |x - a|$, $\psi_b(y) = |y| - |y - b|$ とおく。条件は $\phi_a(x) + \psi_b(y) = 0$ である。 $x \leq 0$ では $\phi_a(x) = -a$ なので $\psi_b(y) = a$ である。 $0 \leq a < b$ だから、これは $0 \leq y \leq b$ の範囲で $2y - b = a$ となり、 $y = \frac{a+b}{2} = \frac{a^2+a+1}{2}$ である。 $0 \leq x \leq a$ では $\phi_a(x) = 2x - a$ なので $\psi_b(y) = a - 2x$ である。したがって $2y - b = a - 2x$ より $y = \frac{a+b}{2} - x = \frac{a^2+a+1}{2} - x$ である。 $x \geq a$ では $\phi_a(x) = a$ なので $\psi_b(y) = -a$ である。よって $2y - b = -a$ から $y = \frac{b-a}{2} = \frac{a^2-a+1}{2}$ である。

以上より、固定した a での等距離集合は $y = \frac{a^2+a+1}{2}$ ($x \leq 0$), $y = \frac{a^2+a+1}{2} - x$ ($0 \leq x \leq a$), $y = \frac{a^2-a+1}{2}$ ($x \geq a$) の 3 部分からなる。

これを $a \geq 0$ について合併する。

まず $x \leq 0$ では $y = \frac{a^2+a+1}{2}$ であり、右辺は $a \geq 0$ で最小値 $1/2$ をとり、その後いくらでも大きくなる。したがって $y \geq \frac{1}{2}$ ($x \leq 0$) である。

次に $x \geq 0$ を考える。中央の斜め部分を通るには $a \geq x$ が必要であり、そのとき $y = \frac{a^2+a+1}{2} - x$ である。この右辺は $a \geq 0$ で増加するので、 $a = x$ のとき最小となり $y \geq \frac{x^2-x+1}{2}$ を与える。

一方、右水平部分を通るには $0 \leq a \leq x$ が必要であり、そのとき $y = \frac{a^2-a+1}{2} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}$ である。 $0 \leq x \leq 1/2$ では、 $0 \leq a \leq x$ の範囲でこの値は $a = x$ のとき最小となるので、下端は $\frac{x^2-x+1}{2}$ である。 $x \geq 1/2$ では、 $a = 1/2$ を選べるので最小値は $\frac{3}{8}$ である。さらに右水平部分で得られる値と中央部分で得られる値がつながるため、この下端以上のすべての点が得られる。

したがって求める範囲は

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2} & (x \leq 0), \\ y \geq \frac{x^2 - x + 1}{2} & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right), \\ y \geq \frac{3}{8} & \left(x \geq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

である。図では、左側は水平線 $y = 1/2$ 以上、中央は放物線 $y = (x^2 - x + 1)/2$ 以上、右側は水平線 $y = 3/8$ 以上を塗る。

▶ 解法 2

【方針】

固定した a の等距離線を 3 部分に分けた後、逆に各 x で取り得る y の最小値を最適化する。最後に境界以上の全点の実現することを構成的に確認する。

【解答】

(1)

$$|x| + |y| = |x - 1| + |y - 1|$$

を $x = 0, 1, y = 0, 1$ で場合分けすると

$$\{x \leq 0, y \geq 1\} \cup \{0 \leq x \leq 1, y = 1 - x\} \cup \{x \geq 1, y \leq 0\}$$

を得る。

(2) $b = a^2 + 1$ とする。 $b > a$ であり、固定した a の等距離集合は

$$\begin{aligned} y &= (a^2 + a + 1)/2, & x &\leq 0, \\ y &= (a^2 + a + 1)/2 - x, & 0 &\leq x \leq a, \\ y &= (a^2 - a + 1)/2, & x &\geq a. \end{aligned}$$

ここから a を動かす。

$x \leq 0$ では $(a^2 + a + 1)/2$ が $a \geq 0$ で $1/2$ 以上の全値を取る。 $x \geq 0$ では、斜め部分の条件 $a \geq x$ から得る下端は

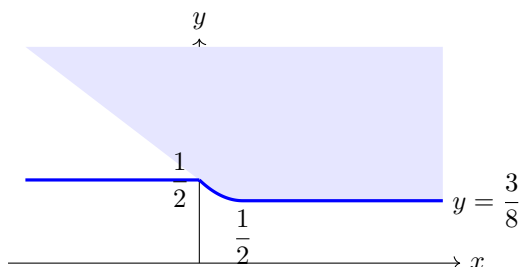
$$\frac{x^2 - x + 1}{2}.$$

右水平部分では $0 \leq a \leq x$ のもとで

$$\frac{a^2 - a + 1}{2} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}$$

を最小化する。よって $0 \leq x \leq 1/2$ では $a = x$ 、 $x \geq 1/2$ では $a = 1/2$ が最小である。各式は a の連続関数で上方へ無限に伸び、2 つの部分の値域も端点で接続するから、下端以上の全値を取る。したがって求める範囲は

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2} & (x \leq 0), \\ y \geq \frac{x^2 - x + 1}{2} & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ y \geq \frac{3}{8} & (x \geq \frac{1}{2}). \end{cases}$$



【総評】 難度は 8、計算量は 7。固定パラメータの等距離線の合併が境界線だけでなく上方領域全体になることを確認した。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。