

東京大学 1995 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

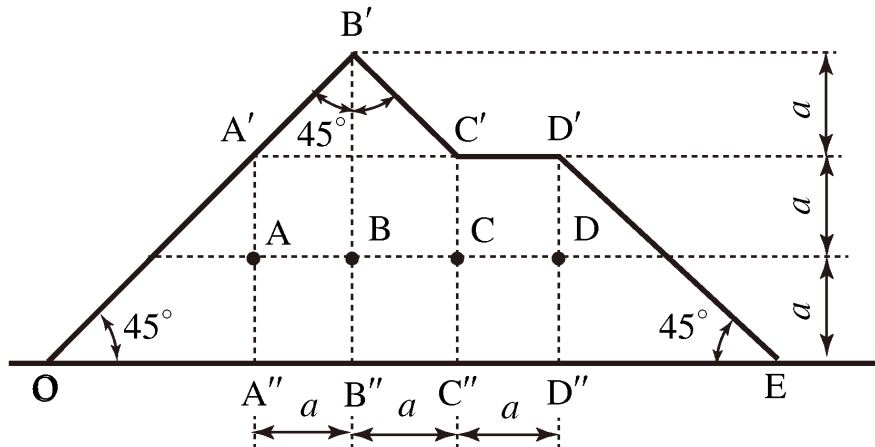
【第 1 問】

パスカル三角形の第 n 行の部分

$$P_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_{3k}, \quad Q_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_{3k+1}, \quad R_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_{3k+2}$$

として数列 $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$ を定義する。ただし $k > n$ のとき ${}_nC_k = 0$ とする。

- (1) P_{n+1} , Q_{n+1} , R_{n+1} を P_n , Q_n , R_n の式として表せ。
- (2) 一般項 P_n , Q_n , R_n を求めよ。
- (3) P_{12} , Q_{12} , R_{12} を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

パスカルの関係から 3 つの和の巡回漸化式を作る。3 乗して 1 になる複素数を用いて、二項展開から添字の 3 剰余類だけを抽出する。

【解答】

(1) パスカルの関係

$${}_{n+1}C_j = {}_nC_j + {}_nC_{j-1}$$

を添字の 3 剰余類ごとに加えると

$$P_{n+1} = P_n + R_n, \quad Q_{n+1} = Q_n + P_n, \quad R_{n+1} = R_n + Q_n.$$

(2)

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

とおく。 $1 + \omega = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)$ である。二項展開した $(1+z)^n$ に $z = 1, \omega, \omega^2$ を代入し、 $1 + \omega^j + \omega^{2j}$ が j を 3 で割り切れるときだけ 3 になることを使う。すると

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2^n + 2 \cos(n\pi/3)}{3}, \\ Q_n &= \frac{2^n + 2 \cos((n-2)\pi/3)}{3}, \\ R_n &= \frac{2^n + 2 \cos((n-4)\pi/3)}{3}. \end{aligned}$$

(3) $n = 12$ のとき、3 つの余弦は順に $1, -1/2, -1/2$ である。よって

$$P_{12} = 1366, \quad Q_{12} = 1365, \quad R_{12} = 1365.$$

▶ 解法 2

【方針】

複素数を使わず、3 つの和の差 $X_n = P_n - Q_n$, $Y_n = Q_n - R_n$ を追う。差の組が 6 周期になることと $P_n + Q_n + R_n = 2^n$ から一般項を復元する。

【解答】

(1) パスカルの関係を用いると

$$P_{n+1} = P_n + R_n, \quad Q_{n+1} = Q_n + P_n, \quad R_{n+1} = R_n + Q_n.$$

(2)

$$X_n = P_n - Q_n, \quad Y_n = Q_n - R_n$$

とおくと

$$X_{n+1} = -Y_n, \quad Y_{n+1} = X_n + Y_n.$$

$(X_0, Y_0) = (1, 0)$ から順に計算すると

$n \bmod 6$	0	1	2	3	4	5
X_n	1	0	-1	-1	0	1
Y_n	0	1	1	0	-1	-1

となり 6 周期である。また二項係数の総和より

$$P_n + Q_n + R_n = 2^n.$$

和と差を解けば

$$P_n = \frac{2^n + 2X_n + Y_n}{3},$$

$$Q_n = \frac{2^n - X_n + Y_n}{3}, \quad R_n = \frac{2^n - X_n - 2Y_n}{3}.$$

上の周期表を余弦で書き直すと

$$P_n = \frac{2^n + 2 \cos(n\pi/3)}{3},$$

$$Q_n = \frac{2^n + 2 \cos((n-2)\pi/3)}{3}, \quad R_n = \frac{2^n + 2 \cos((n-4)\pi/3)}{3}.$$

(3) $12 \equiv 0 \pmod{6}$ なので $X_{12} = 1$, $Y_{12} = 0$ である。 $2^{12} = 4096$ を代入して

$$P_{12} = 1366, \quad Q_{12} = R_{12} = 1365.$$

【総評】 難度は 7、計算量は 6。原問題の 3 つの部分和と原図を復元した。3 乗根による抽出と、差の 6 周期による実数的な導出で一般項を照合し、3 項の和が常に 2^n になることも確認した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 2 問】

平面上に 2 点 P, Q があり、 P と Q の距離は 1 であるとする。このとき、次の条件を満たす三角形 ABC の面積 S の最大値を求めたい。

(条件) 三角形 ABC は与えられた平面上にあり、各頂点 A, B, C から P までの距離または Q までの距離のうち、少なくとも一方は 1 以下である。

P を中心とする半径 1 の円周を E 、 Q を中心とする半径 1 の円周を F とする。

- (1) 条件の下で最大面積をもつ三角形の頂点 A, B, C は、それぞれ E または F 上にあることを示せ。
- (2) そのうち 2 頂点 A, B が円周 E 上にあるとする。円の中心 P から弦 AB に下ろした垂線の長さを p とする。 p を固定したとき、条件を満たす三角形 ABC の面積 S が最大となるならば、弦 AB と直線 PQ は直交することを示せ。
- (3) 条件を満たす三角形 ABC の面積 S の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

許容領域を 2 つの閉円板の和集合と見る。(1) は対辺からの距離を増やす境界化で示す。(2) は弦の単位法線方向への P, Q の射影差を評価し、(3) を p の 1 変数最大化にする。

【解答】

(1) 他の 2 頂点を固定すると、三角形の面積は残る頂点から対辺の直線までの距離に比例する。その頂点が所属する円板の内部にあれば、対辺から遠ざかる向きへ円周まで動かして面積を増やせる。よって最大三角形の各頂点は E または F 上にある。

(2) 弦 AB の長さは

$$AB = 2\sqrt{1 - p^2}.$$

これは p を固定すれば一定である。直線 AB の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。 P, Q の法線方向への射影差は

$$|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ}| \leq PQ = 1.$$

C を 2 円板のどちらにとっても、直線 AB からの高さは

$$2 + p$$

以下である。等号を得るには、 P, Q の射影差が 1 でなければならない。したがって $\mathbf{n} \parallel PQ$ 、すなわち

$$AB \perp PQ$$

である。

(3) 弦 AB を P から Q と反対側へ距離 p の位置に置き、 C を Q からさらに同じ向きへ 1 だけ進んだ円周上にとれば、高さ $2 + p$ を実現する。よって

$$S(p) = (2 + p)\sqrt{1 - p^2} \quad (0 \leq p \leq 1).$$

これを微分すると、導関数の符号は

$$1 - 2p - 2p^2$$

で決まる。したがって最大点は

$$p = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

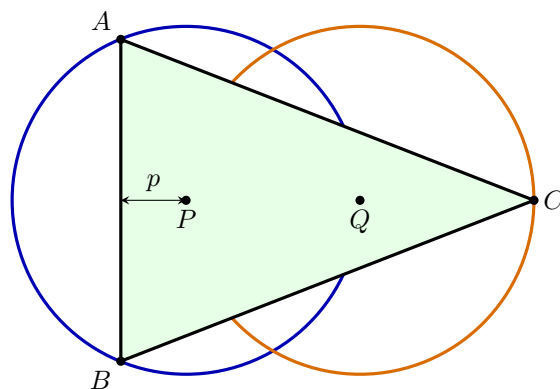
このとき

$$S_{\max}^2 = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4}$$

なので

$$S_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}.$$

【最大配置の弦と 2 つの円】



▶ 解法 2

【方針】

$P = (0, 0)$, $Q = (1, 0)$ と座標化する。固定弦の方向を法線角で表して高さの最大値を直接比較し、最後は $p = \cos \alpha$ の三角関数で最大化する。

【解答】

(1) 2 つの単位円板の和集合を D とする。2 頂点を固定したとき、残る頂点について面積は対辺からの距離の定数倍である。頂点が円板の内部にあれば、その円板内で対辺から遠ざかる方向へ境界まで動かせる。よって最大時には各頂点がどちらかの円周上にある。

(2) 3 頂点のうち少なくとも 2 頂点は同じ円周上にあるので、それを $A, B \in E$ とする。弦 AB の直線を

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c, \quad |c| = p$$

と書く。弦長は $2\sqrt{1-p^2}$ である。 $P = (0, 0)$, $Q = (1, 0)$ とすれば、 Q の法線方向の座標の絶対値は高々 1 である。したがって 2 円板内の点と弦との距離は高々 $2+p$ であり、これを実現するには $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}| = 1$ が必要である。よって $\mathbf{n}$ は PQ と平行、すなわち $AB \perp PQ$ である。

(3) $p = \cos \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ とおく。最大配置では弦の半分の $\sin \alpha$ 、高さが $2 + \cos \alpha$ なので

$$S(\alpha) = (2 + \cos \alpha) \sin \alpha.$$

微分すると

$$S'(\alpha) = 2 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$p = \cos \alpha$ に戻せば、停留条件は

$$2p^2 + 2p - 1 = 0.$$

範囲内の解 $p = (\sqrt{3} - 1)/2$ で増加から減少へ変わる。代入して

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 6\sqrt{3}}$$

を得る。

【総評】 難度は 9、計算量は 6。原問題の条件と 3 小問を完全に復元した。固定弦での高さの上界 $2+p$ は射影法と座標法で照合し、等号配置を実際に構成して全体の最大値であることを確認した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 3 問】

1 から 13 まで、それぞれ異なる整数が書かれたカードが 1 枚ずつ、全部で 13 枚ある。このカードを使って、 A と B の 2 人が次のルールでゲームを行う。

ア A と B は最初に 2 枚ずつカードを持つ。互いのカードの数字は見えない。

イ まず A が 1 枚のカードを数字が見えるようにして出し、 B はそれを見て 1 枚のカードを出す。数字の大きいカードを出した者が 1 点を得る。

ウ 次に残りのカードを出し合って、数字の大きいカードを出した者が 1 点を得る。

エ この際、 A と B はそれぞれ自分の得点が最大となるようにカードを出すものとする。

(1) カードが配られた後、 A は手持ちのカードのうち、数字の大きいものを最初に出すのが有利か、不利か、あるいはどちらを出してもよいか。

(2) A , B に無作為に 2 枚ずつカードを配った場合、 A の得点の期待値を求めよ。

(3) A はカードの数字の合計が 14 となるような 2 枚を最初を選んで持っているものとする。 B は残りのカードから無作為に 2 枚を選んでゲームを行う。この場合、 A ははじめにどのようにカードを選べば得点の期待値が最大となるか、また最小となるか。それぞれの場合の得点の期待値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 枚同士で起こり得る 2 通りの対応付けを比べる。 B は A の初手を見て、 A の総得点が小さい方の対応付けを選べるため、 A の初手順序は影響しない。期待値は 4 枚の順位型と、(3) の得点 $0 \cdot 2$ となる組数を数える。

【解答】

(1) A のカードを $a_1 < a_2$ 、 B のカードを $b_1 < b_2$ とする。2 回の対戦の対応付けは

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2)$$

または

$$(a_1, b_2), (a_2, b_1)$$

の 2 通りである。 A がどちらを先に出しても、 B は返すカードを選ぶことでこの 2 通りのうち A の総得点が小さい方を実現できる。したがって A はどちらを先に出してもよい。

(2) 配られた 4 枚を小さい順に $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ とする。 A の持ち方 6 通りと最適な総得点は

A の順位	12	13	14	23	24	34
得点	0	0	1	1	1	2

である。6 通りは等確率なので

$$E[A \text{ の得点}] = \frac{0+0+1+1+1+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

(3) A のカードを $(k, 14-k)$, $1 \leq k \leq 6$ とする。 B の選び方は

$${}_{11}C_2 = 55$$

通りである。 A が 2 点を確実に得るのは、 B の 2 枚がともに k より小さいときなので、その組数は

$$N_2 = {}_{k-1}C_2.$$

A が 0 点となる組を B の大きい方 d で数えると

$$N_0 = \sum_{d=15-k}^{13} (d-k-2) = \frac{(k-1)(24-3k)}{2}.$$

残りは 1 点なので

$$E_k = 1 - \frac{N_0 - N_2}{55} = 1 - \frac{(k-1)(13-2k)}{55}.$$

値を並べると

k	1	2	3	4	5	6
E_k	1	$\frac{46}{55}$	$\frac{41}{55}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{43}{55}$	$\frac{10}{11}$

である。したがって最大は

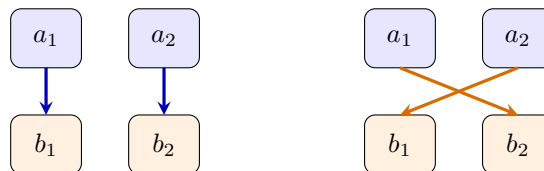
$$\{1, 13\}, \quad \text{期待値 } 1,$$

最小は

$$\{4, 10\}, \quad \text{期待値 } \frac{8}{11}$$

である。

【2通りのカード対応】



▶ 解法 2

【方針】

2 回の対戦を 2 行 2 列の対応表として整理し、 B が小さい総得点を選ぶゲームとみなす。(2) は 4 枚内の順位だけで分類し、(3) は得点 2 と 0 の差だけを直接数えて期待値を出す。

【解答】

(1) $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ とする。各対戦について勝てば 1、負ければ 0 と数える。 A が a_1 を先に出したとき、 B の返し方により生じる 2 通りの組合せは

$$\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}, \quad \{(a_1, b_2), (a_2, b_1)\}$$

である。 a_2 を先に出すと、この 2 通りの順序が入れ替わるだけである。 B は小さい方を選ぶので、 A の初手はどちらでも同じである。

(2) 4 枚の具体的な数字は大小関係にだけ影響する。小さい順の順位を 1, 2, 3, 4 と書くと、 A の手札が 12, 13 のとき 0 点、14, 23, 24 のとき 1 点、34 のとき 2 点である。よって

$$E[A \text{ の得点}] = 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

(3) $A = \{k, 14 - k\}$ とする。期待値は、基準の 1 点に対し「2 点の組」を加え「0 点の組」を引けばよい。2 点の組数は

$$N_2 = {}_{k-1}C_2.$$

0 点にできるのは、 B の小さいカードが k より大きく、大きいカードが $14 - k$ より大きい場合である。大きいカードを $d = 15 - k, \dots, 13$ とすると、小さいカードの候補は $d - k - 2$ 枚なので

$$N_0 = \sum_{d=15-k}^{13} (d - k - 2) = \frac{(k-1)(24-3k)}{2}.$$

したがって

$$E_k = 1 + \frac{N_2 - N_0}{55} = 1 - \frac{(k-1)(13-2k)}{55}.$$

$k = 1, \dots, 6$ を代入して比較すると、最大は $\{1, 13\}$ で期待値 1、最小は $\{4, 10\}$ で期待値

$$\frac{8}{11}$$

である。

【総評】 難度は 9、計算量は 7。原問題のゲーム規則を完全に復元した。初手順序が対応付けの順を入れ替えるだけであること、全配布での期待値 $5/6$ 、固定和 14 での 6 候補を全組合せ列挙でも独立検算した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、図の縮尺に依存しない式による説明も併記している。