

東京大学 1996 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n を正の整数とし、 n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし、1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。次の 4 つの場合について、相異なる入れ方の総数を求めよ。

- (1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、 A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合。
- (2) 互いに区別のつかない n 個のボールを、 A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合。
- (3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。
- (4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき、互いに区別のつかない n 個のボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は各ボールの箱選択、(2) は 3 変数の非負整数解として数える。(3) はいったん箱を区別した入れ方を、箱の 6 通りの並べ替えで分類し、それぞれに変わらない入れ方を数える。(4) は箱内の個数を $0 \leq x \leq y \leq z$ と並べ、 x ごとに可能な y を加える。

【解答】

(1)

各ボールに 3 箱の選択肢があるので、

$$3^n.$$

(2)

各箱の個数を x, y, z とすると、

$$x + y + z = n, \quad x, y, z \geq 0$$

の整数解の数である。よって

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

(3)

まず 3 箱を区別した 3^n 通りを考える。箱の並べ替えは 6 通りある。何も動かさない並べ替えでは全 3^n 通りが変わらない。2 箱だけを交換する並べ替えは 3 通りあり、各場合で変わらない入れ方は、動かさない 1 箱に全ボールを入れる 1 通りだけである。3 箱を巡回させる 2 通りの並べ替えでは、 $n > 0$ なので変わらない入れ方はない。

したがって、同じ入れ方が 6 回ずつ数えられることを補正すると、

$$\frac{3^n + 3}{6}.$$

(4)

3 箱の個数を

$$0 \leq x \leq y \leq z, \quad x + y + z = 6m$$

とする。 x は 0 から $2m$ まで動き、固定した x に対して

$$x \leq y \leq \left\lfloor \frac{6m-x}{2} \right\rfloor.$$

よって総数は

$$\sum_{x=0}^{2m} \left(\left\lfloor \frac{6m-x}{2} \right\rfloor - x + 1 \right).$$

ここで

$$\left\lfloor \frac{6m-x}{2} \right\rfloor = 3m - \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$$

であり,

$$\sum_{x=0}^{2m} \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = m(m+1)$$

だから, 総数は

$$\begin{aligned} (2m+1)(3m+1) - m(2m+1) - m(m+1) \\ = 3m^2 + 3m + 1. \end{aligned}$$

▶ 解法 2

【方針】

(3) は使用する箱の個数を 1 個, 2 個, 3 個に分け, 番号つきボールの集合の分割として数える。(4) は箱の個数を $i, i+j, i+j+k$ とおき, 方程式 $3i+2j+k=6m$ の非負整数解を i の偶奇に分けて数える。

【解答】

(1)

各ボールについて入れる箱を A, B, C の 3 通りから選べるので,

$$3^n.$$

(2)

3 箱のボール数を x, y, z とすれば,

$$x+y+z=n, \quad x, y, z \geq 0$$

の整数解の個数である。仕切り 2 本を用いると,

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

(3)

非空の箱が 1 個なら 1 通りである。非空の箱が 2 個なら, ボールの集合を空でない 2 組に分ける。まず一方の組を選ぶ方法は $2^n - 2$ 通りであるが, 2 組の交換を同一視するので

$$2^{n-1} - 1$$

通りである。

非空の箱が 3 個なら, いったん 3 箱を区別する。全割り当て 3^n 通りから, 指定した 1 箱が空であるものを引き, 2 箱が空であるものを戻すと

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

通りである。3 箱の並べ替え 6 通りを同一視するので

$$\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{6}$$

通りである。以上の和は

$$1 + (2^{n-1} - 1) + \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{6} = \frac{3^n + 3}{6}.$$

(4)

3 箱の個数を小さい順に

$$i, \quad i+j, \quad i+j+k$$

とおく。ここで i, j, k は非負整数である。和が $6m$ だから

$$3i+2j+k=6m.$$

固定した i に対し,

$$0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{6m-3i}{2} \right\rfloor$$

であり, k は一意に決まる。

$i = 2r$ の場合は $0 \leq r \leq m$ で、個数は

$$3(m-r)+1.$$

$i = 2r+1$ の場合は $0 \leq r \leq m-1$ で、個数は

$$3(m-r)-1.$$

したがって総数は

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^m \{3(m-r)+1\} + \sum_{r=0}^{m-1} \{3(m-r)-1\} \\ = 3m^2 + 3m + 1. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 6。4 種類の『区別』を混同しないことが中心である。(3) は空箱を含むため箱の置換の固定点を正しく数え、(4) は順序づけた個数の範囲と床関数の偶奇和を明示した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲を確認した。

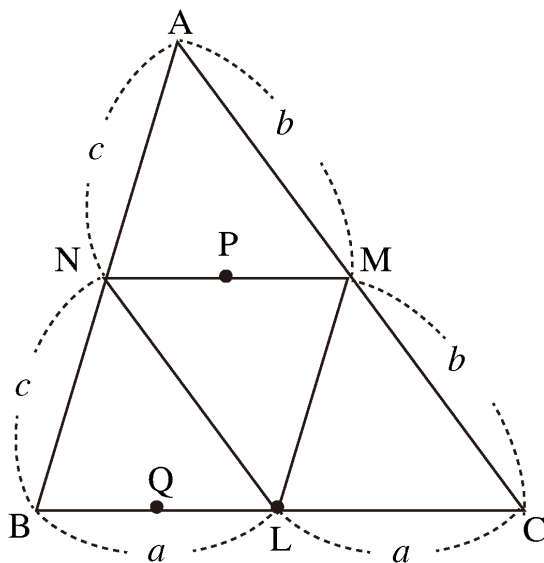
【第 2 問】

3 辺の長さが

$$BC = 2a, \quad CA = 2b, \quad AB = 2c$$

である鋭角三角形 $\triangle ABC$ の 3 辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ L , M , N とする。線分 LM , MN , NL に沿って三角形を折り曲げ、四面体をつくる。

その際、線分 BL と CL , CM と AM , AN と BN はそれぞれ同一視されて、長さが a , b , c の辺になるものとする。



- (1) 線分 MN , BL の中点をそれぞれ P , Q とする。四面体を組み立てたとき、空間内の線分 PQ の長さを求めよ。
- (2) この四面体の体積を a , b , c を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

折り上げ後の四面体は、向かい合う辺がそれぞれ a, b, c で等しい。符号を変えた 4 点による対称な座標模型を置き、辺長から 3 座標を決める。(1) は向かい合う辺の中点間距離、(2) は 3 本の辺ベクトルが作る平行六面体の体積から求める。

【解答】

折り上げ後に A, B, C が一致してできる頂点を T とする。中点連結定理より、向かい合う辺の組は

$$MN = TL = a, \quad NL = TM = b, \quad LM = TN = c$$

である。

4 頂点を

$$\begin{aligned} V_1 &= (x, y, z), & V_2 &= (x, -y, -z), \\ V_3 &= (-x, y, -z), & V_4 &= (-x, -y, z) \end{aligned}$$

と置き, V_1V_2 と V_3V_4 を長さ a の辺とする。このとき

$$\begin{aligned} a^2 &= 4(y^2 + z^2), \\ b^2 &= 4(x^2 + z^2), \\ c^2 &= 4(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8}, \\ y^2 &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{8}, \\ z^2 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{8}. \end{aligned}$$

元の三角形が鋭角なので, 3 つの右辺はすべて正である。

(1)

向かい合う 2 本の a 辺の中点は $(x, 0, 0)$, $(-x, 0, 0)$ である。したがって

$$PQ = 2x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

(2)

V_1 から他の 3 頂点へ向かう 3 ベクトルの成分で作る行列式の絶対値は $16xyz$ である。ここで

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

とおくと, 四面体の体積は

$$\begin{aligned} V &= \frac{16xyz}{6} \\ &= \frac{\sqrt{D}}{6\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2

【方針】

底面を $\triangle LMN$ として通常の直交座標を置く。頂点 T までの 3 辺長を用いて座標を順に決める。(1) は 2 中点の座標差, (2) は底面積と高さから求める。対称座標を用いないため, 折り上げ後の辺対応を別の形で確認できる。

【解答】

折り上げ後に A, B, C が一致してできる頂点を T とする。中点連結定理より

$$MN = TL = a, \quad NL = TM = b, \quad LM = TN = c. \quad (1)$$

(1)

M を原点とし,

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{MN}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{ML}, \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{MT}$$

とおく。(1) より

$$|\mathbf{u}| = a, \quad |\mathbf{v}| = c, \quad |\mathbf{w}| = b.$$

余弦定理に相当する内積計算から

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

P は MN の中点, Q は折り上げ後の TL の中点だから

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\mathbf{w} + \mathbf{v} - \mathbf{u}}{2}.$$

よって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \frac{1}{4} |\mathbf{w} + \mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

したがって

$$PQ = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

(2)

$\triangle LMN$ の面積を Δ , 頂点 T から平面 LMN までの高さを h とする。底面内に

$$M = (0, 0, 0), \quad N = (a, 0, 0), \quad L = (p, q, 0)$$

と置き, $T = (s, t, h)$ と置く。辺長 (1) を順に 2 乗して差を取れば

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, \quad s = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad q = \frac{2\Delta}{a}.$$

さらに $TL = a$ から t を定め, $TM = b$ へ代入して整理する。ここで

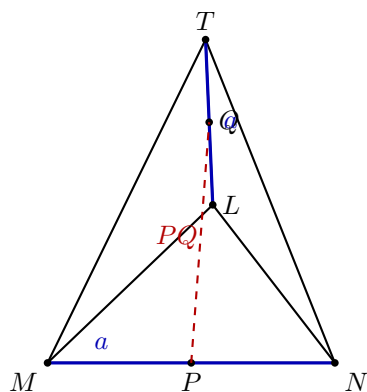
$$\mathcal{D} = (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

とおけば,

$$h^2 = \frac{\mathcal{D}}{8\Delta^2}.$$

したがって体積は

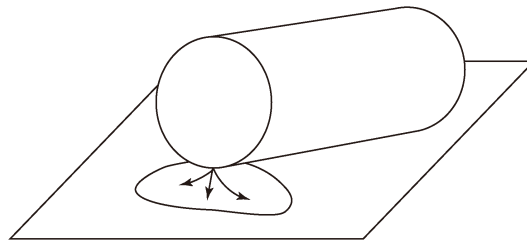
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \Delta h \\ &= \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{6\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



【総評】 難度 8、計算量 7。折り上げ後の対応を、元の三角形の中点連結定理から向かい合う等辺 3 組として読み取る。鋭角条件が座標平方の正值性を保証し、距離と体積の根号が実数になる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲を確認した。

【第 3 問】

直円柱形の石油タンクが、下の図のように側面の一母線で水平な地面と接する形に横倒しになり、地面と接する一点に穴があいて石油が流出しはじめた。



流出前の石油タンクは一杯で、1 時間後の現在までに半分の石油が流出した。単位時間当たりの流出量は、穴から測った油面の高さの平方根に比例するという。

微分方程式を立てて、このあと何時間何分で全部の石油が流出するか予測せよ。ただし、分未満は切り捨てよ。

▶ 解法 1
【方針】

円断面の半径を R 、最下点からの油面高を h とする。油量の高さ微分は水平弦長と円柱の長さの積である。これを流出則と組み合わせて変数分離し、満杯から半量までの 1 時間を使って比例定数を消去する。

【解答】

円柱の長さを L 、断面の半径を R 、最下点からの油面の高さを $h(t)$ とする。高さ h での水平弦の長さは

$$2\sqrt{2Rh - h^2}.$$

油量を W とすると、

$$\frac{dW}{dh} = 2L\sqrt{2Rh - h^2}.$$

流出量が $\sqrt{h}$ に比例するので、正の定数 c を用いて

$$2L\sqrt{2Rh - h^2} \frac{dh}{dt} = -c\sqrt{h}.$$

$0 < h < 2R$ で整理すると

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{K}{\sqrt{2R - h}} \quad \left(K = \frac{c}{2L} > 0 \right).$$

よって高さ h_1 から h_2 まで下がる時間は

$$\frac{1}{K} \int_{h_2}^{h_1} \sqrt{2R - h} \, dh.$$

円の対称性により、油量が半分のとき $h = R$ である。満杯の $h = 2R$ から $h = R$ までが 1 時間だから

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{K} \int_R^{2R} \sqrt{2R - h} \, dh \\ &= \frac{2R^{3/2}}{3K}. \end{aligned}$$

現在の $h = R$ から空の $h = 0$ までの残り時間を T とすると、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{K} \int_0^R \sqrt{2R - h} \, dh \\ &= \frac{2}{3K} \left\{ (2R)^{3/2} - R^{3/2} \right\} \\ &= 2\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

これは

$$2\sqrt{2} - 1 = 1.8284 \dots$$

時間, すなわち 1 時間 49.7 分である。したがって分未満を切り捨てると

このあと 1 時間 49 分

である。

▶ 解法 2

【方針】

円形断面で, 最下点から油面までの高さを角度 θ で表す。弦長, 油面高さ, 高さの微分がすべて半角で整理できるため, 流出に要する時間が θ の積分になる。満杯から半量までと, 半量から空までの積分比を求める。

【解答】

円形断面の半径を R , 円柱の長さを L とする。円の中心から見た角度 θ を

$$h = R(1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

となるように取る。空のとき $\theta = 0$, 半量のとき $\theta = \pi/2$, 満杯のとき $\theta = \pi$ である。

高さ h での弦長は

$$2R \sin \theta$$

だから, 油量 W について

$$\frac{dW}{dh} = 2LR \sin \theta.$$

また

$$\frac{dh}{d\theta} = R \sin \theta, \quad \sqrt{h} = \sqrt{2R} \sin \frac{\theta}{2}.$$

流出則を

$$\frac{dW}{dt} = -c\sqrt{h} \quad (c > 0)$$

と書くと,

$$dt = K \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta$$

となる。ただし $K > 0$ は R, L, c だけで決まる定数である。

したがって, 満杯から半量までの 1 時間は定数倍を除いて

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

に対応する。半量から空までの残り時間 T は

$$\int_0^{\pi/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

に対応する。よって

$$T = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{6}} = 2\sqrt{2} - 1$$

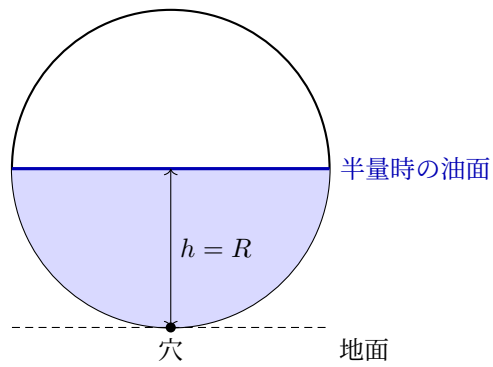
時間である。

$$2\sqrt{2} - 1 = 1.8284 \dots$$

だから, 分未満を切り捨てると

このあと 1 時間 49 分

である。



【総評】 難度 8、計算量 6。油量そのものの面積公式を先に積分する必要はなく、 dW/dh が水平弦長になることを使う。半量時の高さ R という対称性で未知の半径・比例定数を消去した。2 解法の結論を相互照合し、定義域，端点，場合分け，図示範囲を確認した。