

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 1996 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面において，行列

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を f とし，点 $(1, 0)$ を中心とする半径

$$\frac{1}{3}$$

の円を C とする。

f による C の像が直線

$$x = \frac{2}{3}$$

に接し，かつ領域

$$D = \{(x, y) \mid x > 0\}$$

に含まれるような (a, b) 全体のなす図形を ab 平面上に図示せよ。

第 2 問

a, b, c, d を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0, \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時に満たす正の数 s, t があるとき、2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$$

は

$$-1 < x < 1$$

の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

第 3 問

空間内の点 O を中心とする一辺の長さが l の立方体の頂点を

$$A_1, A_2, \dots, A_8$$

とする。また、 O を中心とする半径 r の球面を S とする。

- (1) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。
- (2) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。

ただし、 S 上の点 P から A_k が見えるとは、 A_k が S の外側にあり、線分 PA_k と S との共有点が P のみであることとする。

第 4 問

1つのサイコロを続けて投げて、それによって a_n
 $(n = 1, 2, \dots)$

を次のように定める。

出た目の数を順に $c_1, c_2, \dots$ とするとき、

$$1 \leq k \leq n - 1$$

を満たすすべての整数 k に対して $c_k \leq c_n$ ならば $a_n = c_n$ 、それ以外るとき $a_n = 0$ とおく。ただし、 $a_1 = c_1$ とする。

(1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(n)$$

を求めよ。

(2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ のうち 2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n)$$

を求めよ。

第 5 問

xyz 空間内の円柱

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R > 0)$$

を側面とする容器に、水面が $z = 0$ と一致するように $z \leq 0$ の部分に水がはいっている。

$z \geq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0) = 0, \quad 0 \leq r(z) < R$$

を満たすものを考える。 xz 平面内の不等式

$$0 \leq x \leq r(z), \quad z \geq 0$$

で表される領域を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと、 t 秒後には水面が $z = f(t)$ に上昇するという。

$t \geq 0$ に対して

$$f(t) = e^t - t - 1$$

であるとき、関数 $r(z)$ を決定せよ。

第 6 問

α, β を正の数とし, xy 平面において, 楕円

$$C: \frac{x^2}{\alpha} + \frac{(y - \sqrt{\beta})^2}{\beta} = 1$$

と領域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

を考える。

- (1) C が D に含まれるような点 (α, β) の範囲を求め, $\alpha\beta$ 平面上に図示せよ。
- (2) 点 (α, β) が (1) で求めた範囲を動くとき, 楕円 C の面積の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)