

東京大学 1996 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、行列

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を f とし、点 $(1, 0)$ を中心とする半径

$$\frac{1}{3}$$

の円を C とする。

f による C の像が直線

$$x = \frac{2}{3}$$

に接し、かつ領域

$$D = \{(x, y) \mid x > 0\}$$

に含まれるような (a, b) 全体のなす図形を ab 平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は、中心を $(1, 0)$ から (a, b) に移し、半径を $\sqrt{a^2 + b^2}$ 倍する相似回転として働く。したがって $f(C)$ は中心 (a, b) 、半径 $\sqrt{a^2 + b^2}/3$ の円である。直線 $x = 2/3$ への接条件と、円全体が $x > 0$ に入る条件をそれぞれ式にし、接条件から得た曲線上で a の範囲を絞る。最後に図示に必要な端点の開閉も確認する。

【解答】

円 C 上の点を $(1, 0) + (u, v)$, $u^2 + v^2 = \frac{1}{9}$ と表す。この点の f による像は $(a, b) + (au - bv, bu + av)$ である。ここで $(au - bv)^2 + (bu + av)^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2)$ だから、 $f(C)$ は中心 (a, b) 、半径 $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2}$ の円である。

この円が直線 $x = 2/3$ に接する条件は、中心から直線までの距離が半径に等しいこと、すなわち $\left|a - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2}$ である。両辺を 2 乗すると $9\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 = a^2 + b^2$ であり、整理して $b^2 = 4(2a - 1)(a - 1)$ を得る。

次に、円全体が $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$ に含まれる条件を考える。円の最も左の点の x 座標は $a - \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2}$ であるから、必要十分条件は $a - \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ である。接条件のもとでは $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2} = |a - 2/3|$ なので、これは $a > \left|a - \frac{2}{3}\right|$ と同値である。

この不等式を解く。 $a \geq 2/3$ のときは常に成り立つが、曲線 $b^2 = 4(2a - 1)(a - 1)$ 上に実点があるためには $(2a - 1)(a - 1) \geq 0$ が必要なので、この場合は $a \geq 1$ である。 $a < 2/3$ のときは $a > \frac{2}{3} - a$ より $a > \frac{1}{3}$ であり、曲線上に実点がある条件と合わせて $\frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2}$ となる。

したがって求める図形は、 ab 平面上の曲線 $b^2 = 4(2a - 1)(a - 1)$ のうち $\frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2}$ または $a \geq 1$ を満たす部分である。図示すると、左側の枝は $a = 1/3$ の二点を含まず $a = 1/2$ の点 $(1/2, 0)$ を含む部分、右側の枝は $(1, 0)$ を含んで a 正方向へ伸びる二つの枝である。

▶ 解法 2

【方針】

像の円の中心を (a, b) , 半径を $\rho/3$ とおく。接する直線が中心の左側にある場合と右側にある場合に分けると, 半平面 $x > 0$ に入る条件を幾何的に処理できる。各場合で接条件の曲線に実点がある範囲を重ね, 端点の開閉を決める。

【解答】

原点から (a, b) までの距離を

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

とおく。与えられた 1 次変換は長さを ρ 倍する相似変換なので, $f(C)$ は中心 (a, b) , 半径 $\rho/3$ の円である。

直線 $x = 2/3$ への接条件は

$$\frac{\rho}{3} = \left| a - \frac{2}{3} \right|.$$

したがって

$$a^2 + b^2 = 9 \left(a - \frac{2}{3} \right)^2,$$

すなわち

$$b^2 = 4(2a - 1)(a - 1) \tag{1}$$

である。

まず $a < 2/3$ とする。このとき接線は中心の右側にあり, 半径は $2/3 - a$ である。円の左端が正である条件は

$$a - \left(\frac{2}{3} - a \right) > 0,$$

したがって

$$a > \frac{1}{3}.$$

一方, (1) が実点をもつ条件は $a \leq 1/2$ または $a \geq 1$ だから, この場合は

$$\frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2}.$$

次に $a \geq 2/3$ とする。半径は $a - 2/3$ であり, 円の左端は

$$a - \left(a - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} > 0$$

なので半平面の条件は自動的に満たす。(1) が実点をもつ条件を合わせると

$$a \geq 1.$$

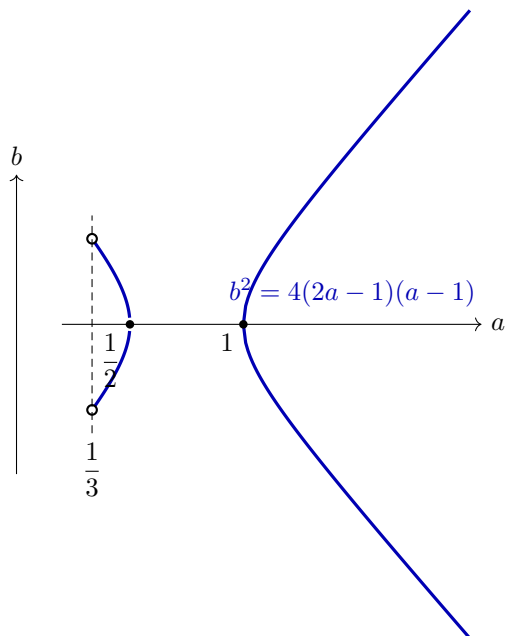
よって求める図形は

$$b^2 = 4(2a - 1)(a - 1)$$

のうち

$$\frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad a \geq 1$$

を満たす部分である。 $a = 1/3$ 上の 2 点は含まず, $(1/2, 0)$ と $(1, 0)$ は含む。



【総評】 円の像を中心と半径で捉えれば，条件整理は短く済む。難易度は 5，計算量は 4 程度で，想定時間は 12 分前後。接条件だけから得られる曲線には余分な部分が含まれるため， $x > 0$ に円全体が含まれる条件を必ず追加すること。特に $a = 1/3$ は左端が $x = 0$ に触れるので除外， $a = 1/2$ と $a = 1$ は条件を満たすので含める，という端点の開閉が図示の採点ポイントになる。2 解法の結論を相互照合し，定義域，端点，場合分け，図示範囲を確認した。

【第 2 問】

a, b, c, d を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0, \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時に満たす正の数 s, t があるとき，2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$$

は

$$-1 < x < 1$$

の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

正の数 s, t をそのまま扱うより， $\lambda = t/s$ とおいて一つの正の比にまとめる。すると仮定から $a < 1, d < 1$ ，さらに $bc < (1-a)(1-d)$ が得られる。あとは与えられた二次式を $q(x)$ とおき， $q(-1) > 0, q(a) < 0, q(1) > 0$ を示す。 $0 < a < 1$ なので，符号変化から $(-1, a)$ と $(a, 1)$ にそれぞれ一つずつ解があることを結論する。

【解答】

二次式を $q(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$ とおく。

仮定より $s > 0, t > 0$ であるから， $\lambda = t/s$ とおくと $\lambda > 0$ であり，二つの不等式は $1-a-\lambda b > 0, 1-d-\frac{c}{\lambda} > 0$ となる。特に $1-a > \lambda b > 0, 1-d > \frac{c}{\lambda} > 0$ であるから $0 < a < 1, 0 < d < 1$ である。また二つの不等式を掛け合わせると $(1-a)(1-d) > \lambda b \cdot \frac{c}{\lambda} = bc$ を得る。

ここで $q(1) = 1-a-d+ad-bc = (1-a)(1-d)-bc > 0$ である。さらに $q(-1) = 1+a+d+ad-bc = (1+a)(1+d)-bc$ であり， $(1+a)(1+d) - (1-a)(1-d) = 2a+2d > 0$ だから $(1+a)(1+d) > (1-a)(1-d) > bc$ となり， $q(-1) > 0$ である。

一方， $0 < a < 1$ を用いて $x = a$ を代入すると $q(a) = a^2 - a(a+d) + ad - bc = -bc < 0$ である。したがって $q(x)$ は区

間 $(-1, a)$ で正から負へ、区間 $(a, 1)$ で負から正へ符号を変える。二次式は連続であるから、方程式 $q(x) = 0$ は $(-1, a)$ に少なくとも一つ、 $(a, 1)$ に少なくとも一つの実数解をもつ。

これら二つの区間は交わらないので、得られた二つの解は異なる。また二次方程式の実数解は高々二つである。よって与えられた二次方程式は $-1 < x < 1$ の範囲に異なる二つの実数解をもつ。

▶ 解法 2

【方針】

仮定から $0 < a, d < 1$ と $bc < (1-a)(1-d)$ を得るところまでは同じである。その後は二次式の判別式と軸に注目する。判別式が正であること、軸が $(0, 1)$ 内にあること、さらに両端 $x = -1, 1$ で正で軸上では負であることを示し、2 根を区間内に挟む。

【解答】

二次式を

$$q(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

とおく。正の数

$$\lambda = \frac{t}{s}$$

を用いると、仮定は

$$1 - a > \lambda b > 0, \quad 1 - d > \frac{c}{\lambda} > 0$$

と書ける。したがって

$$0 < a < 1, \quad 0 < d < 1,$$

さらに 2 式を掛けて

$$bc < (1-a)(1-d)$$

を得る。

$q(x) = 0$ の判別式は

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ &= (a-d)^2 + 4bc > 0 \end{aligned}$$

だから、異なる 2 つの実数解をもつ。放物線の軸は

$$x = \frac{a+d}{2}$$

であり、 $0 < a, d < 1$ から

$$0 < \frac{a+d}{2} < 1$$

である。また、軸における値は

$$q\left(\frac{a+d}{2}\right) = -\frac{\Delta}{4} < 0.$$

一方、

$$q(1) = (1-a)(1-d) - bc > 0$$

である。さらに

$$(1+a)(1+d) > (1-a)(1-d) > bc$$

より

$$q(-1) = (1+a)(1+d) - bc > 0.$$

したがって、軸より左側で $x = -1$ から軸までに 1 根、軸より右側で軸から $x = 1$ までに 1 根がある。よって異なる 2 根はいずれも

$$-1 < x < 1$$

に含まれる。

【総評】 仮定の不等式から二次式の符号を作る論証問題である。難易度は 6, 計算量は 4 程度で, 想定時間は 15 分前後。最初に $\lambda = t/s$ を導入して $bc < (1-a)(1-d)$ まで落とし込めるかが核心である。答案では $0 < a < 1$ を明示しないと, $q(a) < 0$ を使った区間分割の意味が弱くなる。符号変化を示した後は, 二つの区間が互いに交わらないため解が異なる, という一文まで書くと証明が締まる。2 解法の結論を相互照合し, 定義域, 端点, 場合分け, 図示範囲を確認した。

【第 3 問】

空間内の点 O を中心とする一辺の長さが l の立方体の頂点を

$$A_1, A_2, \dots, A_8$$

とする。また, O を中心とする半径 r の球面を S とする。

- (1) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。
- (2) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。

ただし, S 上の点 P から A_k が見えるとは, A_k が S の外側にあり, 線分 PA_k と S との共有点が P のみであることをとする。

▶ 解法 1

【方針】

まず, 球面上の点 P から外部の点 A が見える条件を, 線分 PA が球の内側へ入らない条件として内積で表す。立方体の頂点を $\frac{l}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, 球面上の点を $P = r(u, v, w)$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ とおくと, 可視条件は符号和 $\pm u \pm v \pm w$ の大小比較になる。(1) では最大の符号和 $|u| + |v| + |w|$ の最小値を調べる。(2) では対称性により $u \geq v \geq w \geq 0$ として, 2 番目に大きい符号和 $u + v - w$ の最小値を調べる。

【解答】

(1)

球面 S 上の点 P と, 立方体の頂点の一つ A を考える。線分 PA 上の点は $P + \lambda(A - P)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) と表せる。 $|P| = r$ であるから,

$$\begin{aligned} |P + \lambda(A - P)|^2 - r^2 &= |P|^2 + 2\lambda P \cdot (A - P) + \lambda^2 |A - P|^2 - r^2 \\ &= \lambda \{2(P \cdot A - r^2) + \lambda |A - P|^2\} \end{aligned}$$

である。 $0 < \lambda \leq 1$ に対してこの値が負にならないければ, 線分 PA は球の内側に入らず, 共有点は P だけである。 λ を十分小さくしたときの符号も考えると, これは $P \cdot A \geq r^2$ と同値である。

立方体の頂点は $\frac{l}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ と書ける。球面上の点を $P = r(u, v, w)$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ とおくと, ある頂点が見える条件は $\frac{lr}{2}(\pm u \pm v \pm w) \geq r^2$ すなわち $\pm u \pm v \pm w \geq \frac{2r}{l}$ である。

固定した (u, v, w) に対して, 八つの符号和の最大値は $|u| + |v| + |w|$ である。したがって, すべての P から少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件は $|u| + |v| + |w| \geq \frac{2r}{l}$ がすべての $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ で成り立つことである。

ここで $|u| + |v| + |w| \geq \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 1$ であり, 等号は $(u, v, w) = (1, 0, 0)$ などで成り立つ。よって左辺の最小値は 1 である。したがって必要十分条件は $\frac{2r}{l} \leq 1$ すなわち $r \leq \frac{l}{2}$ である。この条件の下では頂点の距離 $\sqrt{3}l/2$ は r より大きいので, 頂点は球面の外側にある。

(2)

今度は, すべての P から少なくとも 2 点が見える条件を考える。座標軸の入れ替えと符号の反転に関する対称性により, $u \geq v \geq w \geq 0$ としてよい。このとき八つの符号和のうち最も大きいものは $u + v + w$ であり, 2 番目に大きいものは $u + v - w$ である。実際, ほかの候補 $u - v + w$ や $-u + v + w$ は, $v \geq w, u \geq w$ により $u + v - w$ 以下である。

したがって, 少なくとも 2 点が見えるためには, すべての $u \geq v \geq w \geq 0$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ に対して $u + v - w \geq \frac{2r}{l}$ が成り立つことが必要十分である。

この左辺の最小値を求める。 $v - w \geq 0$ だから $u + v - w \geq u$ である。また $u \geq v \geq w \geq 0$ より $1 = u^2 + v^2 + w^2 \leq 3u^2$ なので $u \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。したがって $u + v - w \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。等号は $u = v = w = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき成り立つから, 最小値は $1/\sqrt{3}$ である。

よって必要十分条件は $\frac{2r}{l} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ すなわち $r \leq \frac{l}{2\sqrt{3}}$ である。この条件でも各頂点は球面の外側にある。

▶ 解法 2

【方針】

点 P における球の接平面を考える。頂点が見えることは、その頂点が接平面の外側の半空間にあることと同値である。立方体の 8 頂点を符号ベクトルで表し、接平面の外側にある頂点の個数を符号和の大きい順に調べる。

【解答】

球面上の点を

$$P = ru, \quad u = (u, v, w), \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

とする。 P における球の接平面は

$$u \cdot x = r$$

であり、球は

$$u \cdot x \leq r$$

の側にある。したがって、外部の点 A が P から見えるための必要十分条件は

$$u \cdot A \geq r$$

である。

立方体の頂点は

$$A = \frac{l}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

と表せるので、可視条件は

$$\pm u \pm v \pm w \geq \frac{2r}{l}. \quad (1)$$

(1)

8 個の符号和の最大値は

$$|u| + |v| + |w|$$

である。この値は

$$|u| + |v| + |w| \geq \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 1$$

を満たし、 $(u, v, w) = (1, 0, 0)$ など で 1 になる。よってすべての P で (1) を満たす頂点が少なくとも 1 個あるための必要十分条件は

$$\frac{2r}{l} \leq 1,$$

すなわち

$$r \leq \frac{l}{2}.$$

(2)

立方体の対称性により

$$u \geq v \geq w \geq 0$$

としてよい。このとき最大の符号和は $u + v + w$ 、2 番目は $u + v - w$ である。さらに

$$u + v - w \geq u, \quad 1 = u^2 + v^2 + w^2 \leq 3u^2$$

だから

$$u + v - w \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

等号は

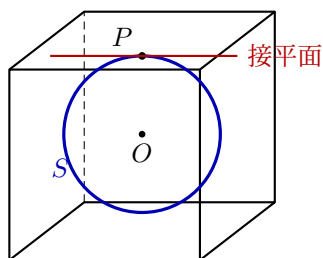
$$u = v = w = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

のとき成り立つ。したがって、すべての P から少なくとも 2 頂点が見えるための必要十分条件は

$$\frac{2r}{l} \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

すなわち

$$r \leq \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$



【総評】 見える条件を内積の不等式に直し、その後は八つの符号和の順序を調べる問題である。難易度は 8, 計算量は 6 程度で、想定時間は 25 分前後。(1) は最大の符号和の最小値, (2) は 2 番目に大きい符号和の最小値を求める点が違う。(2) で最大値だけを見てしまうと「少なくとも 2 点」の条件にならない。対称性で $u \geq v \geq w \geq 0$ にしてから、なぜ 2 番目が $u + v - w$ なのかを一言説明すると、答案の説得力が大きく上がる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲を確認した。

【第 4 問】

1 つのサイコロを続けて投げて、それによって a_n

$$(n = 1, 2, \dots)$$

を次のように定める。

出た目の数を順に $c_1, c_2, \dots$ とするとき、

$$1 \leq k \leq n - 1$$

を満たすすべての整数 k に対して $c_k \leq c_n$ ならば $a_n = c_n$, それ以外するとき $a_n = 0$ とおく。ただし, $a_1 = c_1$ とする。

(1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(n)$$

を求めよ。

(2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ のうち 2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n)$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$a_n = j$ となるには, n 回目に j が出て, それ以前のすべての目が j 以下であればよい。この条件をそのまま確率に直すと $P(a_n = j)$ が得られ, 期待値 $E(n)$ は有限和で表せる。(2) は「2 に等しい個数」を各回の指示量の和と見て, 期待値を $P(a_k = 2)$ の和に分解する。別の考え方として, 2 が数えられるのは初めて 3 以上が出る前に限られることから, 停止までに出る 2 の個数の期待値としても求められる。

【解答】

(1) $1 \leq j \leq 6$ とする。 $a_n = j$ となるのは, $c_n = j$ であり, かつ $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ がすべて j 以下であるときである。したがって $P(a_n = j) = \frac{1}{6} \left(\frac{j}{6} \right)^{n-1}$ である。

よって期待値は

$$\begin{aligned} E(n) &= \sum_{j=1}^6 jP(a_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^6 j \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{j}{6}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^6 \left(\frac{j}{6}\right)^n \end{aligned}$$

である。この和のうち $j = 6$ の項は常に 1 であり、 $1 \leq j \leq 5$ の項は $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = 1$$

である。

(2) $a_k = 2$ となるのは、 $c_k = 2$ であり、かつ $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ がすべて 2 以下であるときである。したがって

$$P(a_k = 2) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

である。 $a_1, a_2, \dots, a_n$ のうち 2 に等しいものの個数は、各 k についての事象 $a_k = 2$ の指示量を足したものである。期待値は和に分けられるから

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{k=1}^n P(a_k = 2) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3} = \frac{1}{4} \{1 - (1/3)^n\} \end{aligned}$$

である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n) = \frac{1}{4}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は最初の $n - 1$ 回に 6 が出たかどうかで分ける。6 が出ていれば a_n の条件付き期待値はちょうど 1 であり、まだ出ていない事象の確率は 0 へ収束する。(2) は「初めて 3 以上が出るまでに現れる 2 の個数」と見て、残り回数に関する漸化式を立てる。

【解答】

(1)

最初の $n - 1$ 回に少なくとも 1 回 6 が出る事象を H_n とする。この事象の確率は

$$P(H_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

H_n が起きているとき、 $a_n \neq 0$ となるのは $c_n = 6$ のときだけである。したがって H_n のもとでの a_n の期待値は

$$6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

一方、 H_n が起きていない場合でも

$$0 \leq a_n \leq 6$$

である。よって

$$P(H_n) \leq E(n) \leq P(H_n) + 6\{1 - P(H_n)\}.$$

$n \rightarrow \infty$ のとき両端はともに 1 へ収束するから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = 1.$$

(2)

$a_k = 2$ となるのは、最初に 3 以上の目が出る前に 2 が出たときに限る。最初の n 回について、初めて 3 以上が出るまでに現れる 2 の個数の期待値を M_n とする。これは $N(n)$ に等しい。

第 1 投が 2 なら 1 個を数えて同じ問題が $n - 1$ 回残り、第 1 投が 1 なら個数を増やさず同じ問題が残る。第 1 投が 3 以上ならそこで終了する。したがって

$$M_n = \frac{1}{6}(1 + M_{n-1}) + \frac{1}{6}M_{n-1}, \quad M_0 = 0.$$

すなわち

$$M_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}M_{n-1}.$$

この漸化式を解くと

$$M_n = \frac{1}{4} \left(M_0 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{4}.$$

【総評】 記録更新型の定義を確率に直す問題である。難易度は 5，計算量は 4 程度で，想定時間は 12 分前後。 $a_n = j$ では過去の目が j 以下でよく， j 未満ではない点が最も間違えやすい。(2) は個数の期待値を各回の確率の和として処理すれば，事象同士が独立でなくても問題ない。別の考え方のように「初めて 3 以上が出るまで」と見れば， $1/4$ という値の意味も確認できる。2 解法の結論を相互照合し，定義域，端点，場合分け，図示範囲を確認した。

【第 5 問】

xyz 空間内の円柱

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R > 0)$$

を側面とする容器に，水面が $z = 0$ と一致するように $z \leq 0$ の部分に水がはいっている。

$z \geq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0) = 0, \quad 0 \leq r(z) < R$$

を満たすものを考える。 xz 平面内の不等式

$$0 \leq x \leq r(z), \quad z \geq 0$$

で表される領域を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと， t 秒後には水面が $z = f(t)$ に上昇するという。

$t \geq 0$ に対して

$$f(t) = e^t - t - 1$$

であるとき，関数 $r(z)$ を決定せよ。

▶ 解法 1

【方針】

時刻 t に水面は $z = f(t)$ まで上がるので，容器内で増えた水面下の体積は $\pi R^2 f(t)$ である。一方，回転体は下へ t だけ動いているため，その時刻に水面下へ入った部分は，移動前の高さで $0 \leq z \leq t + f(t)$ にあたる部分である。したがって

$$\int_0^{t+f(t)} r(z)^2 dz = R^2 f(t)$$

を立てる。与えられた $f(t) = e^t - t - 1$ では $t + f(t) = e^t - 1$ となるので， $u = e^t - 1$ に置き換えて微分し， $r(z)$ を決定する。

【解答】

時刻 t に水面は $z = f(t)$ まで上昇している。容器の断面積は πR^2 だから，水面上昇によって増えた水面下の体積は $\pi R^2 f(t)$ である。

一方、回転体は毎秒 1 の速さで下に動くので、時刻 t では移動前の高さ z にあった点が高さ $z-t$ に移っている。この点が水面下にある条件は $z-t \leq f(t)$ すなわち $z \leq t+f(t)$ である。回転体はもともと $z \geq 0$ にあるので、時刻 t に水面下に入っている部分は、移動前の高さで $0 \leq z \leq t+f(t)$ にあたる部分である。

高さ z における回転体の断面積は $\pi r(z)^2$ である。したがって押しのけた体積は

$$\pi \int_0^{t+f(t)} r(z)^2 dz$$

であり、体積のつり合いから

$$\int_0^{t+f(t)} r(z)^2 dz = R^2 f(t)$$

が成り立つ。

ここで $f(t) = e^t - t - 1$ だから $t+f(t) = e^t - 1$ である。 $u = e^t - 1$ とおくと $t = \log(1+u)$ であり、 $f(t) = u - \log(1+u)$ となる。したがってすべての $u \geq 0$ について

$$\int_0^u r(z)^2 dz = R^2 \{u - \log(1+u)\}$$

である。

両辺を u で微分すると、連続性より $r(u)^2 = R^2 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) = R^2 \frac{u}{1+u}$ を得る。 $r(u) \geq 0$ であるから $r(u) = R\sqrt{\frac{u}{1+u}}$

である。文字を z に戻すと $r(z) = R\sqrt{\frac{z}{1+z}}$ ($z \geq 0$) となる。

この関数は $r(0) = 0$ を満たし、 $z \geq 0$ で $0 \leq \frac{z}{1+z} < 1$ だから $0 \leq r(z) < R$ も満たす。よってこれが求める関数である。

▶ 解法 2

【方針】

水面上昇量と沈んだ回転体の体積の等式を立てた後、置換をせず時刻 t で直接微分する。積分の上端 $e^t - 1$ の微分を忘れずに連鎖律を使い、最後に $z = e^t - 1$ と読み替える。

【解答】

時刻 t に水面下へ入っている回転体は、移動前の高さで

$$0 \leq z \leq t+f(t)$$

にあった部分である。したがって体積保存より

$$\pi \int_0^{t+f(t)} r(z)^2 dz = \pi R^2 f(t).$$

$f(t) = e^t - t - 1$ を代入すると

$$\int_0^{e^t-1} r(z)^2 dz = R^2 (e^t - t - 1). \quad (1)$$

両辺を t で微分する。 r は連続であるから、積分の上端の微分も含めて

$$r(e^t - 1)^2 e^t = R^2 (e^t - 1).$$

ここで

$$z = e^t - 1$$

とおけば $e^t = 1+z$ である。 $t \geq 0$ が動くとき $z \geq 0$ をすべて動くので、

$$r(z)^2 (1+z) = R^2 z \quad (z \geq 0).$$

$r(z) \geq 0$ より

$$r(z) = R\sqrt{\frac{z}{1+z}} \quad (z \geq 0).$$

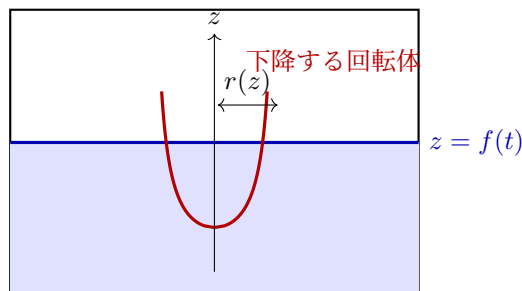
実際,

$$r(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{z}{1+z} < 1$$

なので, 問題の条件

$$0 \leq r(z) < R$$

も満たす。



【総評】 水面上昇量と沈んだ回転体の体積を対応させる立式が中心の問題である。難易度は 6, 計算量は 5 程度で, 想定時間は 18 分前後。最大の注意点は, 時刻 t に水面下へ入っている部分が, 移動前の高さで $0 \leq z \leq t + f(t)$ になること。ここを $0 \leq z \leq f(t)$ としてしまうと全く別の式になる。最後は求めた $r(z)$ が $r(0) = 0$ と $0 \leq r(z) < R$ を満たすことまで確認すると, 関数決定問題として答案が完結する。2 解法の結論を相互照合し, 定義域, 端点, 場合分け, 図示範囲を確認した。

【第 6 問】

α, β を正の数とし, xy 平面において, 楕円

$$C: \frac{x^2}{\alpha} + \frac{(y - \sqrt{\beta})^2}{\beta} = 1$$

と領域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

を考える。

- (1) C が D に含まれるような点 (α, β) の範囲を求め, $\alpha\beta$ 平面上に図示せよ。
- (2) 点 (α, β) が (1) で求めた範囲を動くとき, 楕円 C の面積の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

楕円上の点を $x = \sqrt{\alpha} \cos \theta$, $y = \sqrt{\beta}(1 + \sin \theta)$ と表し, 単位円板に含まれる条件を $x^2 + y^2 \leq 1$ に直す。 $u = \sin \theta$ とおけば, 調べるべき量は $-1 \leq u \leq 1$ 上の二次式 $g(u) = \alpha(1 - u^2) + \beta(1 + u)^2$ の最大値になる。最大が端点 $u = 1$ に出る場合と, 内部の頂点に出る場合を α と β の大小で分け, 最後に得られた領域上で面積 $\pi\sqrt{\alpha\beta}$ を最大化する。

【解答】

(1)

楕円 C 上の点は

$$x = \sqrt{\alpha} \cos \theta, \quad y = \sqrt{\beta} + \sqrt{\beta} \sin \theta = \sqrt{\beta}(1 + \sin \theta)$$

と表せる。 $u = \sin \theta$ とおくと $-1 \leq u \leq 1$ であり, $x^2 + y^2 = \alpha(1 - u^2) + \beta(1 + u)^2$ である。したがって C が D に含まれる条件は $\alpha(1 - u^2) + \beta(1 + u)^2 \leq 1$ がすべての $-1 \leq u \leq 1$ で成り立つことである。

ここで $g(u) = \alpha(1 - u^2) + \beta(1 + u)^2$ とおく。展開すると $g(u) = \alpha + \beta + 2\beta u + (\beta - \alpha)u^2$ である。

まず $\alpha \leq 2\beta$ の場合を考える。 $\alpha \leq \beta$ なら $g(u)$ は下に凸または一次式であり, 最大は端点で生じる。 $\beta < \alpha \leq 2\beta$ なら $g(u)$ の二次の係数は負で, 頂点の u 座標 $\frac{\beta}{\alpha - \beta}$ が 1 以上なので, $[-1, 1]$ では $u = 1$ で最大となる。いずれにしても最大値は $g(1) = 4\beta$ である。よってこの場合の条件は $4\beta \leq 1$ すなわち $\beta \leq \frac{1}{4}$ である。

次に $\alpha > 2\beta$ の場合を考える。このとき $g(u)$ の二次の係数は負で、頂点 $u = \frac{\beta}{\alpha - \beta}$ は $0 < u < 1$ を満たす。したがって最大値は

$$g\left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right) = \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha - \beta}$$

である。よって条件は $\alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha - \beta} \leq 1$ である。 $\alpha - \beta > 0$ だから、両辺に $\alpha - \beta$ を掛けて整理すると $\alpha^2 \leq \alpha - \beta$ すなわち $\beta \leq \alpha(1 - \alpha)$ となる。

これらを α, β 平面で整理する。 $0 < \alpha \leq 1/2$ では、 $\beta \geq \alpha/2$ の部分は最初の場合に含まれ、 $\beta < \alpha/2$ の部分では $\alpha(1 - \alpha) \geq \frac{\alpha}{2}$ なので二番目の場合の条件も自動的に満たされる。したがって $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ が得られる。

一方、 $\alpha > 1/2$ では、許されるのは $0 < \beta \leq \alpha(1 - \alpha)$ の部分であり、右辺が正であるために $\alpha < 1$ が必要である。

したがって求める範囲は $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ または $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $0 < \beta \leq \alpha(1 - \alpha)$ である。図示すると、 $0 < \alpha \leq 1/2$ では高さ $1/4$ までの長方形部分、 $1/2 \leq \alpha < 1$ では放物線 $\beta = \alpha(1 - \alpha)$ の下側部分である。

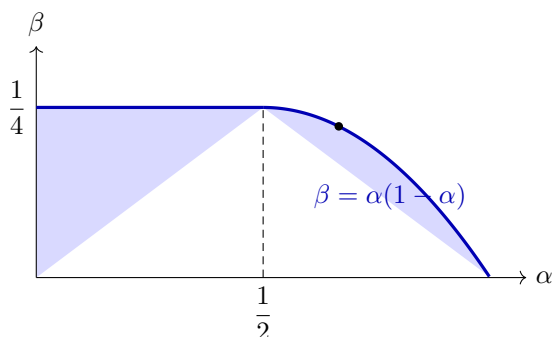
(2)

楕円 C の半径方向の長さは x 方向が $\sqrt{\alpha}$, y 方向が $\sqrt{\beta}$ なので、面積は $\pi\sqrt{\alpha\beta}$ である。したがって $\alpha\beta$ の最大値を求めればよい。

まず $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ の部分では $\alpha\beta \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ である。

次に $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $0 < \beta \leq \alpha(1 - \alpha)$ の部分では $\alpha\beta \leq \alpha^2(1 - \alpha)$ である。ここで $h(\alpha) = \alpha^2(1 - \alpha)$ とおくと $h'(\alpha) = 2\alpha(1 - \alpha) - \alpha^2 = \alpha(2 - 3\alpha)$ である。 $1/2 \leq \alpha < 1$ で最大となるのは $\alpha = \frac{2}{3}$ のときであり、 $h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ である。これは $\frac{4}{27} > \frac{1}{8}$ を満たす。

したがって $\alpha\beta$ の最大値は $4/27$ であり、楕円の面積の最大値は $\pi\sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

許容領域の上側境界では、楕円と単位円が接する。接点が楕円の最上点である場合と、 $x \neq 0$ の内部接点である場合を分ける。後者では 2 曲線の法線が平行になる条件から接点を消去し、境界 $\beta = \alpha(1 - \alpha)$ を得る。

【解答】

(1)

楕円の最上点は

$$(0, 2\sqrt{\beta})$$

であるから、 $C \subset D$ なら必ず

$$4\beta \leq 1. \quad (1)$$

許容領域の上側境界では、楕円 C と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ が接する。

接点が最上点なら (1) で等号が成り立ち、

$$\beta = \frac{1}{4}.$$

この境界が許されるのは $0 < \alpha \leq 1/2$ の範囲である。実際、この範囲で $\beta \leq 1/4$ なら、楕円上の点を

$$x = \sqrt{\alpha} \cos \theta, \quad y = \sqrt{\beta}(1 + \sin \theta)$$

と表し、 $u = \sin \theta$ とおくことにより

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \alpha(1 - u^2) + \beta(1 + u)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - u^2) + \frac{1}{4}(1 + u)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4}(1 - u)^2 \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

となる。

次に $x \neq 0$ の接点を考える。楕円と円の法線が平行だから、ある λ について

$$\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y - \sqrt{\beta}}{\beta} \right) = \lambda(x, y)$$

である。 $x \neq 0$ より $\lambda = 1/\alpha$ であり、

$$y = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\alpha - \beta}.$$

これを楕円と円の両方の式へ代入して消去すると

$$\frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} = 1,$$

すなわち

$$\beta = \alpha(1 - \alpha).$$

この接点が最上点以外にある条件は $\alpha > 1/2$ である。よって許容範囲は

$$\begin{cases} 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, & 0 < \beta \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} \leq \alpha < 1, & 0 < \beta \leq \alpha(1 - \alpha). \end{cases}$$

(2)

楕円の面積は

$$\pi\sqrt{\alpha\beta}$$

である。前半の長方形領域では

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{8}.$$

後半では

$$\alpha\beta \leq \alpha^2(1-\alpha).$$

$$\frac{d}{d\alpha}\{\alpha^2(1-\alpha)\} = \alpha(2-3\alpha)$$

より、最大は

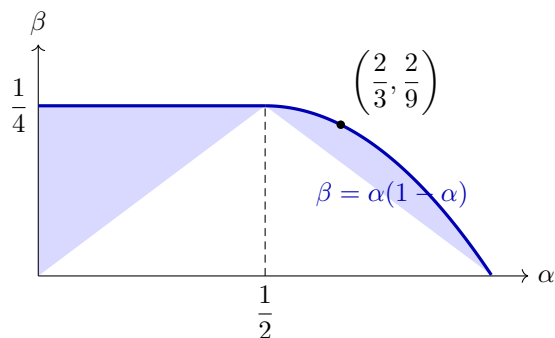
$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{2}{9}$$

で達し、

$$\alpha\beta = \frac{4}{27} > \frac{1}{8}.$$

したがって面積の最大値は

$$\pi\sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$



【総評】 楕円が単位円板に入る条件を、三角関数で1変数二次式の最大値に落とす問題である。難易度は7、計算量は7程度で、想定時間は25分前後。重要なのは、 $\alpha \leq 2\beta$ と $\alpha > 2\beta$ で最大点が端点か内部かに分かれること、その後に条件を $\alpha\beta$ 平面の領域として整理し直すことである。(2) では面積そのものではなく $\alpha\beta$ を最大化すればよいが、前半の長方形部分の最大 $1/8$ と、放物線下側の最大 $4/27$ を比較するところまで書く必要がある。2解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲を確認した。