

東京大学 1997 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

右の図のように、1 辺の長さが 1 の正三角形で、平面を分割する。

これらの 1 辺の長さが 1 の正三角形 1 つ 1 つを、単位正三角形とよぶことにする。はじめに 1 個以上有限個の単位正三角形が塗りつぶされているとし、以下の操作を繰り返すことにより、次々に単位正三角形を塗りつぶしていく。

『1 回の操作ごとに、既に塗りつぶされている単位正三角形と少なくとも 1 つの辺を共有する単位正三角形を、すべて塗りつぶす』

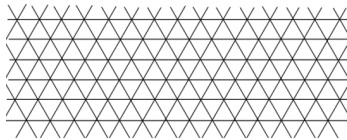
次の問いに答えよ。

(1) はじめに塗りつぶされている単位正三角形が 1 つだけのとき、 n 回目の操作が終わったときに塗りつぶされている単位正三角形の個数 a_n を求めよ。

(2) はじめに 2 個以上有限個の単位正三角形が塗りつぶされているとき、 n 回目の操作が終わったときに塗りつぶされている単位正三角形の個数を b_n とおくと、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

は、はじめの塗りつぶされ方がどのようなであっても存在するか。極限が存在する場合については、その極限値を求めよ。存在しない場合があるならば、その例をあげよ。



▶ 解法 1（格子距離による膨張として捉える）

【方針】

辺を共有する移動回数を距離とみなし、1 個から距離 n 以内にある三角形を数える。任意の有限初期配置は、基準三角形からの最大距離だけ半径をずらした二つの領域ではさむ。

【解答】

二つの単位正三角形の間の距離を、辺を共有する三角形へ移る最小回数とする。1 回の操作は、塗られた集合の距離 1 以内を新たに塗ることに等しい。(1) 最初の三角形から距離がちょうど j である三角形を、格子の 3 方向に沿って一周して数えると $3j$ 個である。実際、第 1 層は 3 個であり、層を一つ外へ移すたび、三つの方向の各辺列が 1 個ずつ伸びて合計 3 個増える。従って

$$a_n = 1 + \sum_{j=1}^n 3j = 1 + \frac{3n(n+1)}{2}.$$

(2) 最初に塗られた有限集合を S とし、その中の一つを T とする。 T から S の各三角形までの距離の最大値を D とおく。 n 回後の集合は各 $U \in S$ を中心とする距離 n 以内の領域の和集合である。 $T \in S$ だから、 T 中心の距離 n 以内の領域を含む。一方、三角不等式より、その和集合は T 中心の距離 $n + D$ 以内の領域に含まれる。よって

$$a_n \leq b_n \leq a_{n+D}.$$

従って

$$\frac{a_n}{a_{n+D}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1.$$

ここで (1) の式から、固定した D に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+D}} = 1.$$

はさみうちにより、どの有限な初期配置でも極限は存在し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

▶ 解法 2 (各層の増分を数える)

【方針】

最初の 1 個から辺を共有する最短回数を距離とし、距離がちょうど j の新しい層だけを数える。一般の有限初期配置については、基準三角形から初期集合までの最大距離 D を取り、半径 n と $n + D$ の一頂点型領域で挟む。

【解答】

(1) 最初の三角形から、辺を共有する三角形へ移る最小回数を距離とする。 j 回目に初めて塗られるのは、距離がちょうど j の三角形である。

三角格子上でこの第 j 層を一周すると、3 方向の辺列がそれぞれ j 個ずつ現れる。従って新しく増える個数を Δ_j とすれば

$$\Delta_j = 3j.$$

よって

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{j=1}^n \Delta_j \\ &= 1 + 3 \sum_{j=1}^n j \\ &= 1 + \frac{3n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

(2) 最初に塗られた有限集合を S とし、その中の 1 個を基準三角形 T とする。 T から S の各三角形までの距離の最大値を D とする。

$T \in S$ だから、 n 回後の塗られた集合は T から距離 n 以内の領域を含む。一方、初期集合のどの三角形も T から距離 D 以内にあるので、三角不等式により、 n 回後の集合全体は T から距離 $n + D$ 以内に含まれる。

従って個数について

$$a_n \leq b_n \leq a_{n+D}$$

である。よって

$$\frac{a_n}{a_{n+D}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1.$$

(1) の式から、固定した D に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+D}} = 1.$$

はさみうちの原理により、どの有限な初期配置についても極限は存在し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 4。操作を格子上の距離による膨張と読むことが核心である。有限な初期配置の形を個別分類せず、最大距離 D だけを使って二つの一頂点型領域ではさむことで、すべての配置を一度に処理した。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 2 問】

座標平面上の点 $A(x, y)$ が次の連立不等式の表す領域を動くとする。

$$\begin{cases} |xy| < 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

関数 $y = \frac{1}{|x|}$ のグラフのうち、 $x < 0$ の部分を H 、 $x > 0$ の部分を K とする。

点 A に対し、 x 軸上の 2 点 B, C 、曲線 H 上の点 D 、曲線 K 上の点 E を次の条件によって定める。

『直線 AB は、2 点 A, B の間の点 D で曲線 H に接し、直線 AC は、2 点 A, C の間の点 E で曲線 K に接する』

(1) 三角形 ABC の面積のとり得る範囲を求めよ。

(2) 三角形 ADE の面積のとり得る範囲を求めよ。

▶ 解法 1 (左右の接点を直接パラメータ化)

【方針】

左右の双曲線上の接点を正の変数で置き、接線が A を通る条件を解く。面積を $t = hk$ だけの式にし、 $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}$ の範囲へ帰着する。

【解答】

$A = (h, k)$ 、 $t = hk$ とおくと、 $k > 0$ 、 $-1 < t < 1$ である。 $D = (-u, 1/u)$ ($u > 0$) における $H : y = -1/x$ の接線は

$$y = \frac{x}{u^2} + \frac{2}{u}.$$

これが A を通る条件は $ku^2 - 2u - h = 0$ である。 D が A, B の間にある根を選ぶと

$$u = \frac{1 + \sqrt{1+t}}{k}, \quad B = (-2u, 0).$$

同様に $E = (v, 1/v)$ における $K : y = 1/x$ の接線から

$$v = \frac{1 + \sqrt{1-t}}{k}, \quad C = (2v, 0).$$

以下

$$\alpha = \sqrt{1+t}, \quad \beta = \sqrt{1-t}, \quad s = \alpha + \beta$$

とおく。 $-1 < t < 1$ より $\alpha, \beta > 0$ 、 $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ である。従って $0 < \alpha\beta \leq 1$ から

$$\sqrt{2} < s \leq 2,$$

ただし $s = 2$ は $t = 0$ で実現する。(1) $BC = 2(u + v)$ 、高さは k なので

$$[ABC] = k(u + v) = 2 + \alpha + \beta = 2 + s.$$

よって

$$2 + \sqrt{2} < [ABC] \leq 4.$$

(2) D, E はそれぞれ辺 AB, AC 上にあり、 y 座標を比べると

$$\frac{AD}{AB} = \frac{k - 1/u}{k} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

従って面積比より

$$[ADE] = [ABC] \frac{\alpha\beta}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}.$$

$\alpha\beta = (s^2 - 2)/2$ と $[ABC] = s + 2$ を代入して整理すると

$$[ADE] = \frac{s^2 - 2}{s} = s - \frac{2}{s}.$$

これは $s > 0$ で狭義増加し、 $\sqrt{2} < s \leq 2$ だから

$$0 < [ADE] \leq 1.$$

▶ 解法 2 (x 切片から接点を復元)

【方針】

左の接線の x 切片を $-L$ 、右を R と置く。双曲線の接線では接点の x 座標が切片の半分になるため、接点と接線を L, R だけで表せる。接線が A を通る 2 次方程式を解き、2 つの三角形の面積を $t = hk$ の 1 変数へまとめる。

【解答】

$$B = (-L, 0), \quad C = (R, 0) \quad (L > 0, R > 0)$$

とおく。双曲線の接線の性質から接点は

$$D = \left(-\frac{L}{2}, \frac{2}{L}\right), \quad E = \left(\frac{R}{2}, \frac{2}{R}\right)$$

である。

左の接線が $A = (h, k)$ を通る条件は

$$kL^2 - 4L - 4h = 0,$$

右の接線については

$$kR^2 - 4R + 4h = 0$$

である。 $t = hk$ とおくと $-1 < t < 1$ であり、接点が線分 AB, AC 上にある方の正の解は

$$L = \frac{2(1 + \sqrt{1+t})}{k}, \quad R = \frac{2(1 + \sqrt{1-t})}{k}.$$

以下

$$\alpha = \sqrt{1+t}, \quad \beta = \sqrt{1-t}, \quad s = \alpha + \beta$$

とおく。 $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ より

$$\sqrt{2} < s \leq 2.$$

右端は $t = 0$ で実現し、左端は $t \rightarrow \pm 1$ の極限である。

(1) 底辺の長さは $L + R$ 、高さは k だから

$$\begin{aligned} [ABC] &= \frac{k(L+R)}{2} \\ &= 2 + \alpha + \beta \\ &= 2 + s. \end{aligned}$$

従って

$$2 + \sqrt{2} < [ABC] \leq 4.$$

(2) 座標を用いて三角形 ADE の行列式を計算し、上の L, R を代入すると

$$[ADE] = s - \frac{2}{s}$$

となる。途中式は、 $\alpha\beta = (s^2 - 2)/2$ と

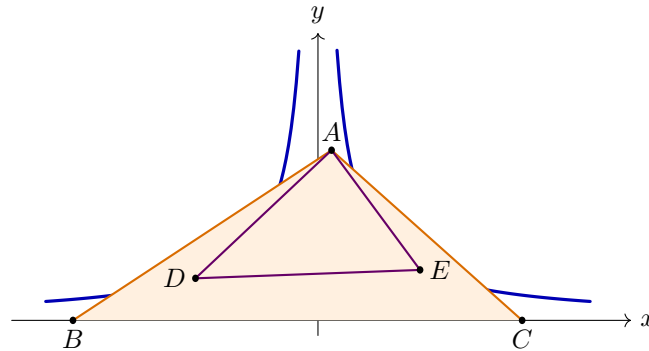
$$\frac{AD}{AB} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{\beta}{1 + \beta}$$

を使っても同じ形に整理できる。

$s - 2/s$ は $s > 0$ で狭義増加するから

$$0 < [ADE] \leq 1.$$

上端は $t = 0$ で実現し、下端 0 は実現しない。



【総評】 難度 8、計算量 8。接線の二次方程式には二根が生じ得るため、接点が A と x 軸上の点の間にある条件で正しい根を選んだ。二つの面積を共通変数 s に統一し、開端点・閉端点も確認した。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 3 問】

ボタンを 1 回押す毎に、1 以上 N 以下の整数を、同じ確率で 1 つずつ発生する機械がある。複数回ボタンを押した場合、どの整数が発生するかについての確率は、どの回についても他の回とお互いに独立であるとする。この機械には、発生した整数の下 4 桁のみを表示する表示装置が接続されており、4 桁未満の数については、欠けている桁に 0 を入れて 4 桁にして表示される。たとえば、発生した整数が 925 のときは 0925 が、12320 のときは 2320 が表示される。

2 回ボタンを押したとき、同じ数字が表示される確率を p_N とする。

- (1) p_{10000} を求めよ。
- (2) p_{10000} と p_{10001} は、どちらが大きいかを判断し、その差を有効数字 1 桁で求めよ。
- (3) 確率 $p_{10000}, p_{10001}, \dots, p_{20000}$ のうち、最小の値を q 、最大の値を r とおく。 q と r を求めよ。
- (4) N を 10000 以上の整数とすると、 $q \leq p_N \leq r$ を示せ。

▶ 解法 1 (出現回数 の二乗和を最大化)

【方針】

各表示値を生じる整数の個数の二乗和として確率を表す。まず $N = 10000 + k$ を微分で調べ、一般の $N = 10000m + k$ はコーシー・シュワルツによる下界と連続変数での上界で評価する。

【解答】

(1) $N = 10000$ では 10000 種類の表示が各 1 回ずつ対応するので

$$p_{10000} = \frac{1}{10000}.$$

(2) $N = 10001$ では一つの表示だけが 2 個の整数に対応し、残り 9999 種類は 1 個ずつ対応する。従って

$$p_{10001} = \frac{2^2 + 9999}{10001^2} = \frac{10003}{10001^2} > \frac{1}{10000}.$$

差は

$$p_{10001} - p_{10000} = \frac{9999}{10000 \cdot 10001^2} \doteq 9.997 \times 10^{-9}.$$

有効数字 1 桁では 1×10^{-8} である。(3) $N = 10000 + k$ ($0 \leq k \leq 10000$) とおくと、 k 種類が 2 回、 $10000 - k$ 種類が 1 回現れるから

$$p_N = \frac{4k + (10000 - k)}{(10000 + k)^2} = \frac{10000 + 3k}{(10000 + k)^2}.$$

右辺を実数 k の関数とみなすと、導関数の符号は $10000 - 3k$ の符号に一致する。従って整数では $k = 3333, 3334$ を比較し、最大は $k = 3333$ で

$$r = p_{13333} = \frac{19999}{177768889}.$$

最小は端点で実現し、両端の値が $1/10000$ なので

$$q = \frac{1}{10000}.$$

(4) 一般に各表示値を生じる整数の個数を $c_1, \dots, c_{10000}$ とすれば、

$$\sum c_j = N$$

かつ

$$p_N = \frac{\sum c_j^2}{N^2}.$$

コーシー・シュワルツの不等式から

$$N^2 \leq 10000 \sum c_j^2$$

なので $p_N \geq q$ である。次に $N = 10000m + k$ ($m \geq 1, 0 \leq k < 10000$) とおく。 k 種類の個数が $m+1$ 、残りが m だから

$$p_N = \frac{10000m^2 + (2m+1)k}{(10000m+k)^2}.$$

$m=1$ は (3) より $p_N \leq r$ である。 $m \geq 2$ では、右辺を実数 k で最大化すると $k = 10000m/(2m+1)$ であり、その値は

$$\frac{1}{10000} \left(1 + \frac{1}{4m(m+1)} \right) \leq \frac{1}{9600}.$$

さらに

$$\frac{1}{9600} < \frac{19999}{177768889} = r$$

だから $p_N < r$ である。以上より、すべての $N \geq 10000$ で $q \leq p_N \leq r$ が成り立つ。

▶ 解法 2 (商と余りから誤差項を分離)

【方針】

$N = 10000m + k$ とし、各 4 桁表示の出現回数が m または $m+1$ になることを使う。確率を $1/10000$ と非負の誤差項の和に変形すれば下限が直ちに出る。上限は $m=1$ を整数で厳密に調べ、 $m \geq 2$ を連続最大値で一括評価する。

【解答】

$N = 10000m + k$ とおく。ただし $m \geq 1, 0 \leq k < 10000$ である。 k 種類の表示が $m+1$ 回、残りが m 回現れるので

$$p_N = \frac{k(m+1)^2 + (10000-k)m^2}{N^2}.$$

これを整理すると

$$p_N = \frac{1}{10000} + \frac{k(10000-k)}{10000N^2}. \quad (1)$$

(1) $N = 10000$ では $k = 0$ だから

$$p_{10000} = \frac{1}{10000}.$$

(2) $N = 10001$ では $k = 1$ なので (1) から

$$p_{10001} - p_{10000} = \frac{9999}{10000 \cdot 10001^2} > 0.$$

従って $p_{10001} > p_{10000}$ であり、差は有効数字 1 桁で

$$1 \times 10^{-8}$$

である。

(3) $10000 \leq N \leq 20000$ では $m=1$ として

$$p_N = \frac{10000 + 3k}{(10000 + k)^2} \quad (0 \leq k \leq 10000)$$

を調べればよい。実数 k で微分すると $k = 10000/3$ を境に増加から減少へ変わる。従って整数候補 $k = 3333, 3334$ を比較し、最大値は

$$r = p_{13333} = \frac{19999}{177768889}.$$

最小値は (1) の誤差項が 0 となる両端で

$$q = \frac{1}{10000}$$

である。

(4) (1) の第 2 項は常に 0 以上なので $p_N \geq q$ である。

$m = 1$ では (3) より $p_N \leq r$ である。 $m \geq 2$ では、 k を実数として最大化した値は

$$\frac{1}{10000} \left(1 + \frac{1}{4m(m+1)} \right).$$

従って

$$p_N \leq \frac{1}{10000} \left(1 + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{9600} < r.$$

以上から、すべての $N \geq 10000$ について

$$q \leq p_N \leq r$$

が成り立つ。

【総評】 難度 8、計算量 8。衝突確率を各表示の出現個数の二乗和で表すと全体が統一される。最初の 1 周期では整数最大点を隣接 2 候補まで比較し、2 周期目以降は連続最大値そのものが r 未満であることを分数比較で確認した。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。