

東京大学 1997 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b を正の数とし, xy 平面の 2 点 $A(a, 0)$ および $B(0, b)$ を頂点とする正三角形を ABC とする. ただし, C は第 1 象限の点とする.

(1) 三角形 ABC が正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ に含まれるような (a, b) の範囲を求めよ.

(2) (a, b) が (1) の範囲を動くとき, 三角形 ABC の面積 S が最大となるような (a, b) を求めよ. また, そのときの S の値を求めよ.

▶ 解法 1 (第 3 頂点の座標と領域の頂点比較)

【方針】

第 3 頂点 C を, AB の中点から AB に垂直な向きへ正三角形の高さだけ進んだ点として座標表示する. 正方形に含まれる条件は, 頂点 A, B, C の座標がすべて $[0, 1]$ に入ることに等しい. 面積は一辺の長さの 2 乗 $a^2 + b^2$ に比例するので, 得られた多角形領域の頂点上で $a^2 + b^2$ を比較する.

【解答】

(1) $A(a, 0), B(0, b)$ であり, C は第 1 象限にある. 線分 AB の中点は $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ である. また $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$ に垂直で第 1 象限側を向くベクトルとして (b, a) をとれば, 正三角形の第 3 頂点は $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(b, a)$ である. したがって $C\left(\frac{a + \sqrt{3}b}{2}, \frac{b + \sqrt{3}a}{2}\right)$ となる.

三角形 ABC が正方形 D に含まれるには, 3 頂点がすべて D に含まれればよい. a, b は正なので, A, B について $0 < a \leq 1, \quad 0 < b \leq 1$ が必要である. さらに C について $\frac{a + \sqrt{3}b}{2} \leq 1, \quad \frac{b + \sqrt{3}a}{2} \leq 1$ である. よって求める範囲は

$$0 < a \leq 1, \quad 0 < b \leq 1, \quad a + \sqrt{3}b \leq 2, \quad \sqrt{3}a + b \leq 2$$

である.

(2) 正三角形の一辺の長さは $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから, 面積は $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$ である. したがって $a^2 + b^2$ を最大にすればよい.

(1) の範囲は直線で囲まれる多角形である. $a^2 + b^2$ は原点からの距離の 2 乗なので, 最大値は境界上, 特に候補となる頂点で調べればよい. 関係する頂点は

$$(1, 0), \quad (1, 2 - \sqrt{3}), \quad (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1), \quad (2 - \sqrt{3}, 1), \quad (0, 1)$$

である.

それぞれの $a^2 + b^2$ を比べると, $(1, 0), (0, 1)$ では $a^2 + b^2 = 1$ である. 一方, $(1, 2 - \sqrt{3}), (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1), (2 - \sqrt{3}, 1)$ では, いずれも $a^2 + b^2 = 8 - 4\sqrt{3}$ である. ここで $8 - 4\sqrt{3} > 1$ なので, 最大値はこの 3 点で達する.

したがって面積の最大値は $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(8 - 4\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$ であり, 最大となる (a, b) は $(a, b) = (1, 2 - \sqrt{3}), (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1), (2 - \sqrt{3}, 1)$ である.

▶ 解法 2 (上端関数を 3 区間に分ける)

【方針】

(1) で頂点と辺の長さを条件式に直す。(2) では a を固定したときに許される b の最大値を求め、折れ線状の上端を 3 区間に分ける。各区間で $a^2 + b^2$ が端点最大になることを確かめれば、候補は 3 点だけに絞れる。

【解答】

(1) 辺 AB の中点は $(a/2, b/2)$ である。第 3 頂点 C はここから (b, a) の方向に辺長の $\sqrt{3}/2$ 倍だけ進んだ点だから

$$C = \left(\frac{a + \sqrt{3}b}{2}, \frac{b + \sqrt{3}a}{2} \right).$$

三角形が正方形に含まれることは、3 頂点が正方形に含まれることと同値である。従って

$$0 < a \leq 1, \quad 0 < b \leq 1, \quad a + \sqrt{3}b \leq 2, \quad \sqrt{3}a + b \leq 2$$

が必要十分条件である。

(2) a を固定すると、許される最大の b は

$$b_{\max}(a) = \begin{cases} 1 & (0 < a \leq 2 - \sqrt{3}), \\ \frac{2-a}{\sqrt{3}} & (2 - \sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} - 1), \\ 2 - \sqrt{3}a & (\sqrt{3} - 1 \leq a \leq 1). \end{cases}$$

$a^2 + b^2$ は $b > 0$ で b とともに増えるので、各 a では $b = b_{\max}(a)$ だけを調べればよい。

第 1 区間では $a^2 + 1$ は右端で最大である。第 2 区間では

$$a^2 + \frac{(2-a)^2}{3}$$

は下に凸な 2 次式だから、閉区間での最大値は端点のどちらかでとる。第 3 区間の

$$a^2 + (2 - \sqrt{3}a)^2$$

も同様に端点最大である。

従って最大点の候補は

$$(a, b) = (2 - \sqrt{3}, 1), \quad (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1), \quad (1, 2 - \sqrt{3})$$

の 3 点である。各点で

$$a^2 + b^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

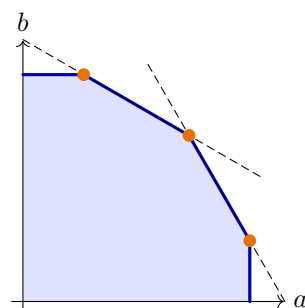
となる。正三角形の一辺は $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ だから

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2).$$

従って 3 点すべてで最大となり、その値は

$$S = 2\sqrt{3} - 3$$

を得る。



橙の 3 点で $a^2 + b^2$ が最大。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18 分。第 3 頂点の座標を正確に作ることが第一の山で、その後は正方形内に入る条件が線形不等式に変わる。最大化では、面積を $a^2 + b^2$ の最大化として見て、領域の頂点を漏れなく比較する必要がある。最大点が 1 点ではなく対称な 3 点になるため、答えを 1 つに絞ってしまわないこと。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 2 問】

n を正の整数、 a を実数とする。すべての整数 m に対して

$$m^2 - (a - 1)m + \frac{n^2}{2n + 1}a > 0$$

が成り立つような a の範囲を n を用いて表せ。

▶ 解法 1 (必要条件を先に取り十分性を平方で示す)

【方針】

与式を $m(m + 1) + a\left(\frac{n^2}{2n + 1} - m\right)$ と書き、 a について一次式として見る。 $m = 0$ と $m = n$ から必要条件 $0 < a < 2n + 1$ が出る。十分性では整数 m を、 $m \leq 0$ 、 $0 < m \leq \frac{n^2}{2n + 1}$ 、 $m > \frac{n^2}{2n + 1}$ に分け、最後の範囲では $a < 2n + 1$ を使って $(m - n)^2$ で下から評価する。

【解答】

与えられた式を $m^2 - (a - 1)m + \frac{n^2}{2n + 1}a = m(m + 1) + a\left(\frac{n^2}{2n + 1} - m\right)$ と書く。

まず必要条件を求める。 $m = 0$ を代入すると $\frac{n^2}{2n + 1}a > 0$ である。 n は正の整数なので $a > 0$ が必要である。また $m = n$ を代入すると $n(n + 1) + a\left(\frac{n^2}{2n + 1} - n\right) > 0$ である。ここで $\frac{n^2}{2n + 1} - n = -\frac{n(n + 1)}{2n + 1}$ だから $n(n + 1) - a\frac{n(n + 1)}{2n + 1} > 0$ である。したがって $a < 2n + 1$ が必要である。

次に、 $0 < a < 2n + 1$ ならばすべての整数 m で与式が正になることを示す。 $m \leq 0$ のとき、整数 m について $m(m + 1) \geq 0$ であり、さらに $\frac{n^2}{2n + 1} - m > 0$ である。 $a > 0$ より与式は正である。 $m > 0$ かつ $m \leq \frac{n^2}{2n + 1}$ のとき、 $m(m + 1) > 0$ であり、第 2 項も 0 以上である。したがって与式は正である。

最後に $m > \frac{n^2}{2n + 1}$ とする。このとき $\frac{n^2}{2n + 1} - m < 0$ である。 $a < 2n + 1$ を負の数に掛けると不等号の向きが逆になるので

$$a\left(\frac{n^2}{2n + 1} - m\right) > (2n + 1)\left(\frac{n^2}{2n + 1} - m\right)$$

である。したがって与式は $m(m + 1) + (2n + 1)\left(\frac{n^2}{2n + 1} - m\right)$ より大きい。この右辺は $m^2 + m + n^2 - (2n + 1)m = m^2 - 2nm + n^2 = (m - n)^2$ である。よって与式は $(m - n)^2$ より大きく、特に正である。

以上より、求める範囲は $0 < a < 2n + 1$ である。

▶ 解法 2 (各整数が与える上限を比較)

【方針】

$c = n^2/(2n+1)$ とおき、与式を $m(m+1) + a(c-m)$ と見る。係数 $c-m$ の符号によって、各整数 m が a に課す条件を整理する。上限を与える $m > c$ では、その上限と $2n+1$ の差が完全平方になることを示し、最も厳しい整数が $m = n$ だと特定する。

【解答】

$$c = \frac{n^2}{2n+1}$$

とおくと、与式は

$$m(m+1) + a(c-m)$$

である。

$m = 0$ を代入すると $ac > 0$ であり、 $c > 0$ だから

$$a > 0$$

が必要である。

$m \leq c$ の整数については、 $m \geq 1$ なら

$$m(m+1) > 0, \quad a(c-m) \geq 0$$

である。 $m \leq 0$ なら $m(m+1) \geq 0$ かつ $c-m > 0$ なので、やはり $a > 0$ のもとで与式は正になる。

残る $m > c$ では $c-m < 0$ であるから、条件は

$$a < R_m, \quad R_m = \frac{m(m+1)}{m-c}$$

と同値である。ここで

$$\begin{aligned} R_m - (2n+1) &= \frac{m(m+1) - (2n+1)(m-c)}{m-c} \\ &= \frac{m^2 - 2nm + n^2}{m-c} \\ &= \frac{(m-n)^2}{m-c} \geq 0. \end{aligned}$$

従って、すべての $m > c$ が与える上限は $2n+1$ 以上である。また

$$n-c = \frac{n(n+1)}{2n+1} > 0$$

なので $m = n$ はこの範囲に属し、等号

$$R_n = 2n+1$$

を実現する。

以上より、上限として最も厳しいものは $m = n$ が与える

$$a < 2n+1$$

である。下限 $a > 0$ と合わせて、求める範囲は

$$0 < a < 2n+1$$

となる。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18 分。整数 m 全体に対する正值条件を、 a についての一次不等式として読む問題である。 $m = 0$ と $m = n$ で必要条件がすぐ出るが、十分性を示すには m の範囲分けが必要である。最後の範囲で負の係数に不等式を掛けるため、不等号の向きを確認することが最も危ない。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 3 問】

r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする. xyz 空間に原点 $O(0, 0, 0)$ と 2 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ をとる.

(1) xyz 空間の点 P で条件

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = r|\overrightarrow{PO}|$$

を満たすものが存在するような r の範囲を求めよ.

(2) 点 P が (1) の条件を満たして動くとき, 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の最大値, 最小値を r の関数と考えてそれぞれ $M(r)$, $m(r)$ で表す. このとき, 左からの極限

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2 \{M(r) - m(r)\}$$

を求めよ.

▶ 解法 1 (楕円上の変動幅を求める)

【方針】

$PA = PB$ から $P = (s, s, z)$ とおける. 距離条件を 2 乗すると $(1-r^2)(2s^2 + z^2) - 2s + 1 = 0$ となり, 平方完成で軌跡が楕円になる条件を読む. (2) では内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を条件式を使って $2s^2 + z^2$ の一次式に直し, 楕円上で s が動く幅から最大値と最小値の差を求める.

【解答】

(1) $P = (x, y, z)$ とする. $PA = PB$ より $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2$ であるから $x = y$ である. そこで $P = (s, s, z)$ とおく.

条件 $PA = rPO$ を 2 乗すると $(s-1)^2 + s^2 + z^2 = r^2(2s^2 + z^2)$ である. 整理して $(1-r^2)(2s^2 + z^2) - 2s + 1 = 0$ を得る. $0 < r < 1$ なので $1-r^2 > 0$ である. これを平方完成すると $2\left(s - \frac{1}{2(1-r^2)}\right)^2 + z^2 = \frac{2r^2-1}{2(1-r^2)^2}$ となる. 実数 s, z が存在するためには右辺が 0 以上であればよい. したがって $2r^2-1 \geq 0$ より $r \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ である. もともと $0 < r < 1$ なので, 求める範囲は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ である.

(2) $I = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ とおく. $P = (s, s, z)$ より

$$\overrightarrow{PA} = (1-s, -s, -z), \quad \overrightarrow{PB} = (-s, 1-s, -z)$$

であるから $I = 2s^2 - 2s + z^2$ である.

一方, 条件式から $2s = (1-r^2)(2s^2 + z^2) + 1$ である. これを用いると $I = (2s^2 + z^2) - 2s = r^2(2s^2 + z^2) - 1$ となる. したがって, I の最大値と最小値の差は, $2s^2 + z^2$ の最大値と最小値の差に r^2 を掛けたものである. $A = 1-r^2$ とおく. 平方完成した式は $2\left(s - \frac{1}{2A}\right)^2 + z^2 = \frac{2r^2-1}{2A^2}$ である. $u = s - \frac{1}{2A}$ とおくと, この楕円上で $2s^2 + z^2 = 2\left(u + \frac{1}{2A}\right)^2 + z^2$ である. 右辺を展開し, 楕円の式 $2u^2 + z^2 = \frac{2r^2-1}{2A^2}$ を使うと, 変動する部分は $\frac{2}{A}u$ だけである.

楕円上では $-\frac{\sqrt{2r^2-1}}{2A} \leq u \leq \frac{\sqrt{2r^2-1}}{2A}$ である. したがって $2s^2 + z^2$ の最大値と最小値の差は $\frac{2\sqrt{2r^2-1}}{A^2}$ である. よって

$M(r) - m(r) = \frac{2r^2\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}$ となる.

したがって $(1-r)^2\{M(r) - m(r)\} = \frac{2r^2\sqrt{2r^2-1}}{(1+r)^2}$ である. $r \rightarrow 1-0$ とすると

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2\{M(r) - m(r)\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である.

▶ 解法 2 (軌跡を直交座標上の円にする)

【方針】

平面 $x = y$ の中で $u = (x + y)/\sqrt{2}$ を座標に選ぶと、 (u, z) は直交座標になる。軌跡を円として表し、内積を u の一次式へ変形することで、最大値と最小値の差を円の水平方向の直径から直接求める。

【解答】

(1) $PA = PB$ から $x = y$ である。平面 $x = y$ 上の直交座標として

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

を用いる。このとき

$$x = y = \frac{u}{\sqrt{2}}, \quad PO^2 = u^2 + z^2.$$

$PA = rPO$ を 2 乗すると

$$(1 - r^2)(u^2 + z^2) - \sqrt{2}u + 1 = 0.$$

平方完成して

$$\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}(1 - r^2)}\right)^2 + z^2 = \frac{2r^2 - 1}{2(1 - r^2)^2}$$

を得る。従って軌跡が存在する条件は $2r^2 - 1 \geq 0$ である。もとの $0 < r < 1$ と合わせて

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$$

となる。

(2) 内積を $I = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ とおく。座標から

$$I = PO^2 - \sqrt{2}u.$$

一方、軌跡の方程式より

$$\sqrt{2}u = (1 - r^2)PO^2 + 1$$

だから

$$I = r^2PO^2 - 1.$$

さらに同じ等式から

$$PO^2 = \frac{\sqrt{2}u - 1}{1 - r^2}.$$

従って I の変動幅は u の変動幅に

$$\frac{\sqrt{2}r^2}{1 - r^2}$$

を掛けたものになる。

円の半径は

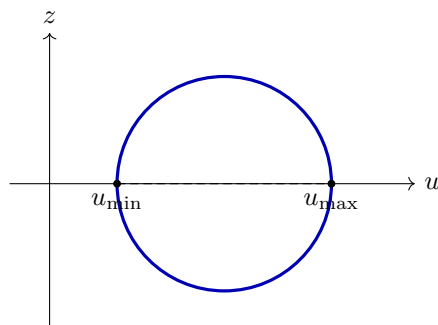
$$\rho = \frac{\sqrt{2r^2 - 1}}{\sqrt{2}(1 - r^2)}$$

なので、 u の最大値と最小値の差は 2ρ である。従って

$$M(r) - m(r) = \frac{\sqrt{2}r^2}{1 - r^2} \cdot 2\rho = \frac{2r^2\sqrt{2r^2 - 1}}{(1 - r^2)^2}.$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r)^2 \{M(r) - m(r)\} &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{2r^2\sqrt{2r^2 - 1}}{(1 + r)^2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



直交座標 (u, z) では軌跡は円になる。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 24 分。距離条件の軌跡を座標で楕円に直し、内積の最大最小差をその楕円上の変動幅として読む問題である。 $x = y$ で変数を減らすこと、平方完成後の右辺から存在条件を読むこと、最後に $1 - r^2 = (1 - r)(1 + r)$ を使って極限を整理することが採点上の要点である。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 4 問】

正三角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に、三角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし $0 < \theta < 60^\circ$ とする。この光線は三角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し、頂点に達するところまでとるものとする。また、三角形の内部では光線は直進するものとする。

(1) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき、この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。

(2) 正の整数 k を用いて $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき、この光線の到達する頂点を求め、またそこへ至るまでの反射の回数を k を用いて表せ。

▶ 解法 1 (反射を展開して格子線を数える)

【方針】

反射を扱う代わりに、正三角形を辺で次々に反射して平面を三角格子で敷きつめる。この展開図では光線は一直線に進む。格子点を AB 方向に i 歩、 60° 方向に j 歩進んだ点として表すと、その点へ向かう傾きは $\frac{\sqrt{3}j}{2i+j}$ である。与えられた $\tan \theta$ と比較して最初に到達する格子点を求め、格子点の頂点ラベルの周期と、途中で横切る格子線の本数から到達頂点と反射回数を読む。

【解答】

(1) 正三角形を、光線が当たる辺で次々に反射して平面を敷きつめる。すると、元の三角形内で反射しながら進む光線は、展開図の中では一直線として進む。

格子点を、辺 AB の方向に i 歩、 60° 方向に j 歩進んだ点として表す。この点の座標は、辺の長さを 1 とすれば $\left(i + \frac{j}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$

である。したがって、原点 A からこの格子点へ向かう直線の傾きは $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}j}{i + \frac{j}{2}} = \frac{\sqrt{3}j}{2i+j}$ である。

いま $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ なので $\frac{\sqrt{3}j}{2i+j} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ である。よって $4j = 2i + j$, $2i = 3j$ となる。最初に到達する格子点は、正の整数解のうち最小の $(i, j) = (3, 2)$ である。

格子点の頂点ラベルは周期的に現れる。 (i, j) に対して $i + 2j$ を 3 で割った余りが、0 なら A 、1 なら B 、2 なら C に対応する。ここでは $3 + 2 \cdot 2 = 7 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから、この格子点は元の三角形の頂点 B に対応する。したがって光線は B に到達する。

(2) 同様に $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6k+2}$ であるから $\frac{\sqrt{3}j}{2i+j} = \frac{\sqrt{3}}{6k+2}$ である。よって $(6k+2)j = 2i + j$ すなわち $2i = (6k+1)j$ である。 $6k+1$ は奇数なので、最初の正の整数解は $(i, j) = (6k+1, 2)$ である。

この格子点について $i + 2j = (6k+1) + 4 = 6k+5 \equiv 2 \pmod{3}$ であるから、到達する頂点は C である。

次に反射回数を数える。展開図では、反射回数は始点から到達点までの直線が途中で横切る三角格子の辺の本数に等しい。 $(i, j) = (6k + 1, 2)$ では、途中で格子点を通らないので、3 方向の格子線について単純に数えればよい。

横切る本数は、 AB 方向に平行な格子線で $j - 1$ 本、 60° 方向に平行な格子線で $i - 1$ 本、残りの方向の格子線で $i + j - 1$ 本である。したがって反射回数は $(j - 1) + (i - 1) + (i + j - 1)$ である。 $i = 6k + 1, j = 2$ を代入すると $(2 - 1) + (6k + 1 - 1) + (6k + 1 + 2 - 1) = 12k + 3$ である。よって反射回数は $12k + 3$ である。

▶ 解法 2 (三角格子の 3 座標で数える)

【方針】

展開図の格子点を、2 本の基本ベクトルに沿う整数座標 (p, q) で表す。傾きから最初に到達する格子点を求め、頂点の種類は $p + 2q$ の 3 での余りで判定する。反射回数は、線分が横切る 3 族の格子線 $p = \text{整数}, q = \text{整数}, p + q = \text{整数}$ を別々に数える。

【解答】

一辺を 1 とし、展開図の格子点を

$$(p, q) \longleftrightarrow \left(p + \frac{q}{2}, \frac{\sqrt{3}q}{2} \right)$$

と表す。原点 A からこの点へ向かう直線の傾きは

$$\frac{\sqrt{3}q}{2p + q}$$

である。

(1)

$$\frac{\sqrt{3}q}{2p + q} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

より $2p = 3q$ である。最小の正整数解は

$$(p, q) = (3, 2)$$

である。格子点が元のどの頂点に重なるかは

$$p + 2q \pmod{3}$$

で決まり、余り $0, 1, 2$ がそれぞれ A, B, C に対応する。ここでは

$$p + 2q = 7 \equiv 1 \pmod{3}$$

なので、到達する頂点は B である。

(2)

$$\frac{\sqrt{3}q}{2p + q} = \frac{\sqrt{3}}{6k + 2}$$

より

$$2p = (6k + 1)q.$$

$6k + 1$ は奇数だから、最小の正整数解は

$$(p, q) = (6k + 1, 2)$$

である。このとき

$$p + 2q = 6k + 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

なので、到達する頂点は C である。

次に反射回数を数える。三角格子の辺は、格子座標では

$$p = \text{整数}, \quad q = \text{整数}, \quad p + q = \text{整数}$$

という 3 族に分かれる。始点と終点を除くと、線分が横切る本数はそれぞれ

$$p - 1, \quad q - 1, \quad p + q - 1$$

である。本問では $\gcd(p, q) = 1$ で、途中の格子点を通らないため重複はない。

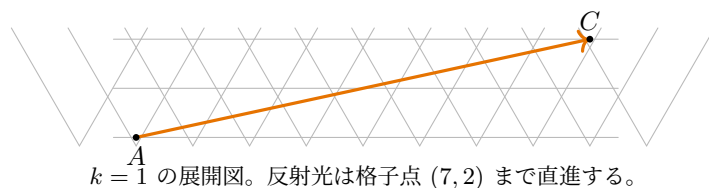
従って反射回数は

$$(p-1) + (q-1) + (p+q-1)$$

である。 $p = 6k + 1$, $q = 2$ を代入して

$$12k + 3$$

を得る。



【総評】 難度 7、計算量 5。目安時間は 22 分。反射を直接追うのではなく、正三角形を反射して三角格子に展開することが核心である。傾き $\frac{\sqrt{3}j}{2i+j}$ の作り方、格子点の頂点对応を $i+2j$ の 3 での余りで読むこと、反射回数を横切った格子線の本数として数えることが採点ポイントになる。途中で格子点を通る場合は数え方が変わるが、本問の $(6k+1, 2)$ ではその心配がない。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 5 問】

a を $0 < a < \frac{1}{4}$ を満たす実数とする。 xy 平面で、不等式

$$y^2 \leq x^2(1-x^2) - a$$

の表す領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (円筒殻と半円積分)

【方針】

領域は x について左右対称であり、 $u = x^2$ とおくと存在条件は $u(1-u) \geq a$ になる。 y 軸まわりの回転体なので、右半分を円筒殻として積分し、半径 x 、高さ $2\sqrt{x^2(1-x^2) - a}$ を用いる。置換 $u = x^2$ の後、 $u(1-u) - a = \frac{1}{4} - a - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2$ と平方完成して、半円の面積として積分値を読む。

【解答】

$u = x^2$ とおく。領域が存在するためには $x^2(1-x^2) - a \geq 0$ すなわち $u(1-u) - a \geq 0$ である。方程式 $u(1-u) - a = 0$ は $u^2 - u + a = 0$ であり、 $0 < a < \frac{1}{4}$ より 2 つの解をもつ。その解は $\alpha = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}$, $\beta = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$ である。したがって右半分では $\sqrt{\alpha} \leq x \leq \sqrt{\beta}$ が積分範囲になる。 y 軸のまわりに回転するので、右半分を円筒殻で積分する。半径は x 、高さは $2\sqrt{x^2(1-x^2) - a}$ であるから、体積 V は

$$V = \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} 2\pi x \cdot 2\sqrt{x^2(1-x^2) - a} dx$$

すなわち

$$V = 4\pi \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} x \sqrt{x^2(1-x^2) - a} dx$$

である。

ここで $u = x^2$ とおくと、 $du = 2x dx$ である。したがって

$$V = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{u(1-u) - a} du$$

となる。

被積分関数の中を平方完成すると $u(1-u)-a = \frac{1}{4} - a - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2$ である。よって積分

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{u(1-u)-a} du$$

は、半径 $\sqrt{\frac{1}{4} - a}$ の半円の面積に等しい。したがって

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{u(1-u)-a} du = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} - a \right)$$

である。ゆえに

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} - a \right) = \pi^2 \left(\frac{1}{4} - a \right)$$

である。

▶ 解法 2 (水平断面を円環として積分)

【方針】

y を固定して不等式を $u = x^2$ の範囲に直す。 y 軸まわりに回転すると、その範囲は内半径と外半径をもつ円環になる。円環の面積を y で積分し、半円の面積公式で体積を求める。

【解答】

$$R^2 = \frac{1}{4} - a$$

とおく。 $0 < a < 1/4$ より $R > 0$ である。

y を固定し、 $u = x^2$ とおくと、与えられた不等式は

$$y^2 \leq u(1-u) - a$$

である。平方完成して

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \leq R^2 - y^2$$

となる。従って断面が存在するのは $|y| \leq R$ のときで、そのとき

$$\frac{1}{2} - \sqrt{R^2 - y^2} \leq x^2 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{R^2 - y^2}.$$

これを y 軸のまわりに回転すると、外半径の 2 乗と内半径の 2 乗の差は

$$2\sqrt{R^2 - y^2}$$

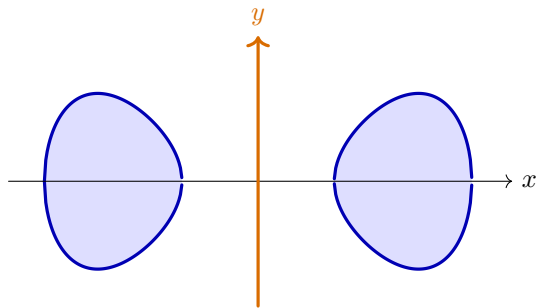
である。従って高さ y における円環の面積は

$$2\pi\sqrt{R^2 - y^2}.$$

よって体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R 2\pi\sqrt{R^2 - y^2} dy \\ &= 2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{2} \\ &= \pi^2 R^2 \\ &= \pi^2 \left(\frac{1}{4} - a \right). \end{aligned}$$

途中の積分は、半径 R の半円の面積に等しい。



$a = 0.1$ の断面例

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18 分。左右対称な領域を y 軸まわりに回すため、右半分を円筒殻で積分するのが自然である。 $u = x^2$ の置換で $x dx$ が消え、残る積分が半円の面積になるところが見せ場である。積分範囲は x ではなく u の端点 α, β に直してから読むと整理しやすい。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 6 問】

a を実数とする。

(1) 曲線 $y = \frac{8}{27}x^3$ と放物線 $y = (x + a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の範囲を求めよ。

(2) a が (1) の範囲にあるとき、この 2 本の接線と放物線 $y = (x + a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。

▶ 解法 1 (2 曲線の接点パラメータを比較)

【方針】

3 次曲線上の接点を $x = t$ として接線を作る。放物線側は $X = x + a$ とおき、 $y = X^2$ の $X = u$ における接線を x の式へ戻す。傾きと切片を比較して $t \neq 0$ が満たす 2 次方程式を得る。面積は放物線上の 2 接点の間隔 d だけで決まり、標準形の積分から $d^3/12$ と計算する。

【解答】

(1) 3 次曲線

$$y = \frac{8}{27}x^3$$

の $x = t$ における接線は

$$y = \frac{8}{9}t^2x - \frac{16}{27}t^3$$

である。

一方、放物線を $X = x + a$ と書くと $y = X^2$ である。 $X = u$ における接線は

$$y = 2u(x + a) - u^2 = 2ux + 2au - u^2.$$

両者が同じ直線になるには、傾きの比較から

$$u = \frac{4}{9}t^2$$

であり、切片の比較から

$$2au - u^2 = -\frac{16}{27}t^3$$

でなければならない。 $u = 4t^2/9$ を代入すると

$$\frac{8}{81}t^2(9a + 6t - 2t^2) = 0.$$

$t = 0$ は常に x 軸を表す。 x 軸以外では $t \neq 0$ なので

$$2t^2 - 6t - 9a = 0 \tag{1}$$

を得る。従って、 x 軸以外の異なる共通接線が 2 本ある条件は、(1) が相異なる 2 つの非零実数解をもつことである。

判別式は

$$36 + 72a = 36(1 + 2a)$$

だから $a > -1/2$ が必要である。また解の積は $-9a/2$ なので、 $a = 0$ では一方が 0 になり、 x 軸以外の接線は 1 本しかない。従って

$$a > -\frac{1}{2}, \quad a \neq 0$$

である。

(2) (1) の 2 根を t_1, t_2 とし、対応する放物線上の接点を u_1, u_2 とする。

$$t_1 + t_2 = 3, \quad |t_1 - t_2| = 3\sqrt{1 + 2a}$$

であり、 $u_i = 4t_i^2/9$ だから

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2| &= \frac{4}{9}|t_1 - t_2||t_1 + t_2| \\ &= 4\sqrt{1 + 2a}. \end{aligned}$$

ここで一般に、放物線 $y = X^2$ の 2 接点の間隔を d とする。接点の中点を原点へ平行移動すると、放物線と 2 本の接線の差を左右に積分でき、囲まれる面積は

$$2 \int_0^{d/2} w^2 dw = \frac{d^3}{12}$$

となる。従って本問では

$$\begin{aligned} S &= \frac{(4\sqrt{1 + 2a})^3}{12} \\ &= \frac{16}{3}(1 + 2a)^{3/2}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (共通接線を傾きの平方根で表す)

【方針】

3 次曲線の x 軸以外の接線を、傾きが $2z^2$ となるようにパラメータ z で表す。この直線が放物線にも接する条件は、交点方程式の判別式を 0 とするだけで得られる。放物線上の接点座標は $X = z^2$ なので、2 接点の間隔から面積を計算する。

【解答】

(1) $z \neq 0$ とする。3 次曲線

$$y = \frac{8}{27}x^3$$

の $x = 3z/2$ における接線は

$$y = 2z^2x - 2z^3$$

である。逆に、 x 軸以外の接線はこの形で一意に表せる。

この直線と放物線 $y = (x + a)^2$ の交点方程式は

$$(x + a)^2 = 2z^2x - 2z^3$$

である。放物線に接する条件は、この x の 2 次方程式の判別式が 0 となることである。計算すると

$$4z^2(z^2 - 2z - 2a) = 0.$$

$z \neq 0$ だから

$$z^2 - 2z - 2a = 0$$

を得る。

x 軸以外の異なる共通接線が 2 本あるためには、この方程式が相異なる 2 つの非零実数解をもてばよい。判別式から

$$4 + 8a > 0,$$

すなわち $a > -1/2$ が必要である。また積 $-2a$ が 0 になる $a = 0$ では一方の解が $z = 0$ となるので除く。従って

$$a > -\frac{1}{2}, \quad a \neq 0$$

である。

(2) 2 根を z_1, z_2 とする。放物線を

$$X = x + a, \quad y = X^2$$

と書くと、接線の傾きは $2z_i^2$ だから、放物線上の接点の X 座標は

$$X_i = z_i^2$$

である。

解と係数の関係から

$$z_1 + z_2 = 2, \quad |z_1 - z_2| = 2\sqrt{1 + 2a}.$$

従って 2 接点の間隔は

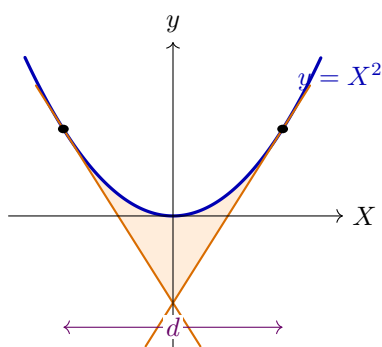
$$d = |X_1 - X_2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2| = 4\sqrt{1 + 2a}.$$

標準放物線 $y = X^2$ と、間隔 d の 2 接点における接線で囲まれる面積は

$$\frac{d^3}{12}$$

である。これは接点の中点を原点へ移し、左右の部分積分すれば直ちに確かめられる。従って

$$\begin{aligned} S &= \frac{(4\sqrt{1 + 2a})^3}{12} \\ &= \frac{16}{3}(1 + 2a)^{3/2}. \end{aligned}$$



2 接点間隔 d に対し、橙色部分の面積は $d^3/12$ 。

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 26 分。共通接線を両曲線の接点パラメータで表し、傾きと切片を照合する問題である。切片比較から得る方程式は $2t^2 - 6t - 9a = 0$ であり、 a の符号を誤ると存在範囲と面積がともに逆転する。実際、 $a = 1$ では 2 本が存在することを数値代入でも確認できる。 $a = 0$ では一方が $t = 0$ 、すなわち除外対象の x 軸になるため除く。2 解法で条件 $a > -1/2$, $a \neq 0$ と面積を独立に照合した。