

東京大学 1998 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上の点 $P_1 = (0, 10)$ を中心とし半径が 1 の円周 C_1 と、 $P_2 = (0, 0)$ を中心とし半径が 2 の円周 C_2 を与える. xy の平面上の 3 点 Q, R, S を頂点とし、角 $\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ に関して次の問いに答えよ.

- (1) 点 Q が円周 C_1 上を動き、点 R が円周 C_2 上を動くとき、第 3 の頂点 S が動いた軌跡を求めよ.
- (2) さらに、直線 $x + 2y = 10$ 上にある点 P_3 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周 C_3 を与える. 点 P_3 を適当にとったところ、頂点 Q, R, S がそれぞれ円周 C_1, C_2, C_3 上にあり、角 $\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ がただ一つだけ定まったという. このときの P_3 の座標を求めよ.

▶ 解法 1 (回転ベクトルと環の接触)

【方針】

$\overrightarrow{RS}$ は $\overrightarrow{RQ}$ を $\pm 90^\circ$ 回転したベクトルである. 回転を J で表し、 S を Q, R の和として表すと、固定中心の周りに長さ 1 と $2\sqrt{2}$ のベクトルを足す問題になる。(2) は半径 $\sqrt{2}$ の円が得られた環状領域にただ 1 点で接する条件を調べる.

【解答】

(1) ベクトルを反時計回りに 90° 回転する写像を J とする. 直角二等辺条件から

$$\overrightarrow{RS} = \pm J \overrightarrow{RQ},$$

従って

$$S = R \pm J(Q - R) = (I \mp J)R \pm JQ.$$

$Q = P_1 + \mathbf{q}$ 、 $R = P_2 + \mathbf{r}$ とし、

$$|\mathbf{q}| = 1, \quad |\mathbf{r}| = 2$$

とする. $P_2 = O$ なので、2 つの向きに対して S の中心は

$$\pm J P_1 = (\mp 10, 0)$$

である. また $|(I \mp J)\mathbf{r}| = \sqrt{2}|\mathbf{r}| = 2\sqrt{2}$ であり、 $\pm J\mathbf{q}$ の長さは 1 である. 2 つの向きが独立に動くので、その和の長さは

$$2\sqrt{2} - 1 \leq \rho \leq 2\sqrt{2} + 1$$

のすべての値をとる. 従って軌跡は 2 つの環状領域

$$(2\sqrt{2} - 1)^2 \leq (x - 10)^2 + y^2 \leq (2\sqrt{2} + 1)^2,$$

$$(2\sqrt{2} - 1)^2 \leq (x + 10)^2 + y^2 \leq (2\sqrt{2} + 1)^2$$

の和集合である.

(2) P_3 を

$$P_3 = (10 - 2t, t)$$

とおく. 直線 $x + 2y = 10$ と中心 $(-10, 0)$ との距離は $4\sqrt{5}$ であり、半径 $\sqrt{2}$ の円が左側の環状領域にただ 1 点で接することはない. 従って中心 $(10, 0)$ の環状領域だけを考えればよい.

三角形がただ 1 つ定まるためには、 C_3 が外周

$$(x - 10)^2 + y^2 = (2\sqrt{2} + 1)^2$$

に外接するか、内周

$$(x - 10)^2 + y^2 = (2\sqrt{2} - 1)^2$$

に内接しなければならない. 前者では

$$|P_3 - (10, 0)| = (2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 1.$$

左辺は $\sqrt{(-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5}|t|$ だから

$$t = \pm \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{5}}{5}.$$

後者では

$$|P_3 - (10, 0)| = (2\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1,$$

従って

$$t = \pm \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5}}{5}.$$

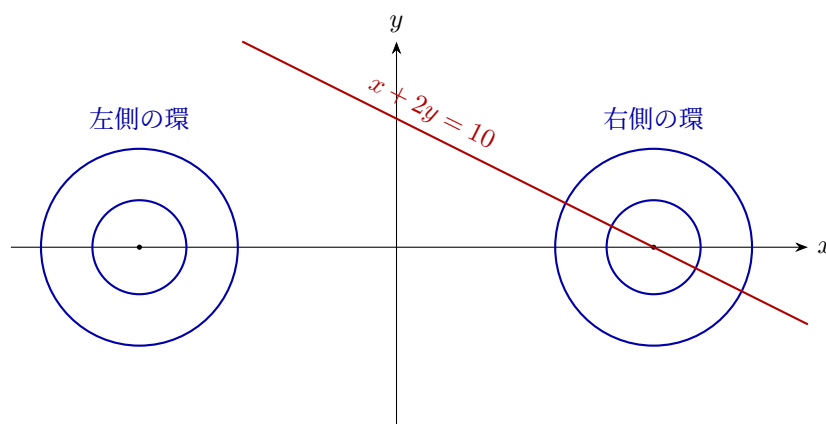
よって求める点は、複号同順で

$$\left(10 \mp \frac{6\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{5}}{5}\right)$$

および

$$\left(10 \mp \frac{2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5}}{5}\right).$$

接点では長さ 1 と $2\sqrt{2}$ のベクトルが一直線に並ぶため Q, R も一意に定まり、各候補は実際に条件を満たす。



▶ 解法 2 (複素数による回転表示)

【方針】

点を複素数で表し、 90° 回転を i 倍として直角二等辺条件を書く。2 つの固定長ベクトルの和が作る環を得た後、中心 P_3 と環の中心との距離だけで唯一性を判定する。

【解答】

(1) 点と同じ文字で複素数を表す。 $Q = 10i + u$ 、 $R = v$ とおけば

$$|u| = 1, \quad |v| = 2.$$

直角二等辺条件から

$$S - R = \pm i(Q - R).$$

従って

$$S = \begin{cases} -10 + (1 - i)v + iu, \\ 10 + (1 + i)v - iu. \end{cases}$$

$(1 \mp i)v$ の長さは $2\sqrt{2}$ 、 $\pm iu$ の長さは 1 であり、偏角は独立に動く。その和の長さは

$$2\sqrt{2} - 1 \leq \rho \leq 2\sqrt{2} + 1$$

のすべてを取る。よって軌跡は

$$(2\sqrt{2} - 1)^2 \leq (x - 10)^2 + y^2 \leq (2\sqrt{2} + 1)^2$$

と

$$(2\sqrt{2} - 1)^2 \leq (x + 10)^2 + y^2 \leq (2\sqrt{2} + 1)^2$$

の和集合である。

(2)

$$P_3 = (10 - 2t, t)$$

とおく。中心 $(10, 0)$ までの距離は

$$d = \sqrt{5} |t|.$$

一方、直線 $x + 2y = 10$ と $(-10, 0)$ の距離は $4\sqrt{5}$ である。 C_3 の半径を加減しても左側の環へ届かないため、右側だけを考えればよい。

環の内半径と外半径を

$$a = 2\sqrt{2} - 1, \quad b = 2\sqrt{2} + 1$$

とする。円 C_3 と環の共通点がただ 1 つで、その点で 2 つの固定長ベクトルの向きも一意になるのは、 C_3 が外側から外周に接するか、穴の内側から内周に接するときである。従って

$$d = b + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 1$$

または

$$d = a - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

よって

$$t = \pm \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{5}}{5}$$

または

$$t = \pm \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5}}{5}.$$

$P_3 = (10 - 2t, t)$ に戻せば、複号同順で

$$\left(10 \mp \frac{6\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{5}}{5} \right)$$

および

$$\left(10 \mp \frac{2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5}}{5} \right)$$

を得る。接点では長さ $2\sqrt{2}$ と 1 のベクトルが一直線上にあるため、対応する Q, R も一意である。

【総評】 難度 8、計算量 7。第 3 頂点の軌跡は円板ではなく、2 つの固定長ベクトルの和が作る環状領域である。2 つの回転方向を別々の中心として扱い、唯一性を外周への外接・内周への内接に翻訳して 4 候補を漏れなく得た。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 2 問】

パラメタ r, θ ($r > 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) に対して x の関数

$$f(x) = r \sin(x + \theta)$$

を考える.

(1) r, θ が等式

$$\int_0^{2\pi} (\sin x - f(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \quad \dots\dots (E)$$

を満たしているとき, r を θ の関数として表せ.

(2) 式 (E) を満たしながら r, θ を動かしたとき, $0 \leq x \leq \pi$ における $y = f(x)$ のグラフは xy 平面上を動く. これらのグラフが動く範囲 D を求め, 図示せよ.

(3) 図形 D の面積を求めよ.

▶ 解法 1 (位相を固定して上下境界を求める)
【方針】

(1) 展開後, 1 周期の三角関数の積分を計算する. (2) $f(x) = \sin x + \sin(x + 2\theta)$ と直し, 固定した x で $2\theta \in [0, \pi/2]$ を動かしたときの最大・最小を 3 区間に分ける. (3) 上下境界の差を積分する.

【解答】

(1) 与式を展開し, 両辺に共通する項を消すと

$$r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(x + \theta) dx = 2r \int_0^{2\pi} \sin x \sin(x + \theta) dx.$$

1 周期の積分より

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x + \theta) dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin x \sin(x + \theta) dx = \pi \cos \theta.$$

$r > 0$ だから

$$r = 2 \cos \theta.$$

(2) 加法定理から

$$f(x) = 2 \cos \theta \sin(x + \theta) = \sin x + \sin(x + 2\theta).$$

$\phi = 2\theta$ とおけば $0 \leq \phi \leq \pi/2$ である. 固定した x について $\sin(x + \phi)$ の範囲を調べると

$$\begin{cases} 2 \sin x \leq y \leq 1 + \sin x & \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right), \\ \sin x + \cos x \leq y \leq 1 + \sin x & \left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), \\ \sin x + \cos x \leq y \leq 2 \sin x & \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right). \end{cases}$$

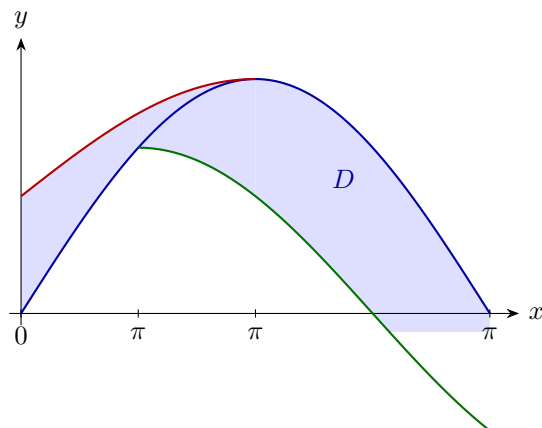
これらの不等式で表される領域が D である. 境界は

$$y = 2 \sin x, \quad y = 1 + \sin x, \quad y = \sin x + \cos x$$

の該当部分からなる.

(3) 従って面積は

$$\begin{aligned} |D| &= \int_0^{\pi/4} (1 - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos x) dx \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \\ &= \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$



► 解法 2 (4 分の 1 円上の線形関数)

【方針】

(1) の条件から $r = 2 \cos \theta$ を得る。(2) では $(u, v) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ を 4 分の 1 円上の点と見て、 $y = \sin x + \sin x u + \cos x v$ という線形関数の最大・最小を幾何的に求める。

【解答】

(1) 両辺を展開して共通項を消すと

$$r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(x + \theta) dx = 2r \int_0^{2\pi} \sin x \sin(x + \theta) dx.$$

左の積分は π 、右の積分は $\pi \cos \theta$ なので、 $r > 0$ より

$$r = 2 \cos \theta.$$

(2) $\phi = 2\theta$ とおくと $0 \leq \phi \leq \pi/2$ であり、

$$y = \sin x + \sin(x + \phi).$$

さらに $u = \cos \phi, v = \sin \phi$ とおけば、 (u, v) は第 1 象限の単位円弧上を動き、

$$y = \sin x + \sin x u + \cos x v.$$

固定した x に対し、後半はベクトル $(\sin x, \cos x)$ と (u, v) の内積である。内積の最大値は向きが円弧内にあるとき 1、そうでなければ端点で取る。最小値は円弧のどちらかの端点で取る。これを x の範囲ごとに整理すると

$$\begin{cases} 2 \sin x \leq y \leq 1 + \sin x & (0 \leq x \leq \pi/4), \\ \sin x + \cos x \leq y \leq 1 + \sin x & (\pi/4 \leq x \leq \pi/2), \\ \sin x + \cos x \leq y \leq 2 \sin x & (\pi/2 \leq x \leq \pi). \end{cases}$$

これが領域 D である。

(3) 上下の境界の差を積分して

$$\begin{aligned} |D| &= \int_0^{\pi/4} (1 - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos x) dx \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 7。横座標を固定して位相だけを動かすと、最大値と最小値を与える端が 4 分の 1 円周と 2 分の 1 円周の位置で切り替わる。3 区間の境界が接続することを確認し、上側と下側の差を正の向きで積分した。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 3 問】

グラフ $G = (V, W)$ とは有限個の頂点の集合 $V = \{P_1, \dots, P_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W = \{E_1, \dots, E_m\}$ からなる図形とする. 各辺 E_j は丁度 2 つの頂点 P_{i_1}, P_{i_2} ($i_1 \neq i_2$) を持つ. 頂点以外での辺同士の交わりは考えない. さらに, 各頂点には白か黒の色がついていると仮定する.

例えば, 図 1 のグラフは頂点が $n = 5$ 個, 辺が $m = 4$ 個あり, 辺 E_i ($i = 1, \dots, 4$) の頂点は P_i と P_5 である. P_1, P_2 は白頂点であり, P_3, P_4, P_5 は黒頂点である.

出発点とするグラフ G_1 (図 2) は, $n = 1, m = 0$ であり, ただ 1 つの頂点は白頂点であるとする.

与えられたグラフ $G = (V, W)$ から新しいグラフ $G' = (V', W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する. これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 だけ増加する.

(操作 1) この操作は G の頂点 P_{i_0} を 1 つ選ぶと定まる. V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする. W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする. E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし, G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする. G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば, G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる. それ以外の頂点の色は変化させない. また P_{n+1} は白頂点にする (図 3).

(操作 2) この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる. V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする. W' は W から E_{j_0} を取り去り, 新しい辺 E_{m+1}, E_{m+2} を加えたものとする. E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき, E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり, E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする. G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする. G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば, G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる. P_{i_2} についても同様に变化させる. それ以外の頂点の色は変化させない. また P_{n+1} は白頂点にする (図 4).

出発点のグラフ G_1 にこれら 2 種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする. 次の問いに答えよ.

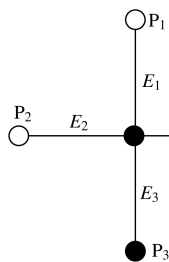


図 1



図 2

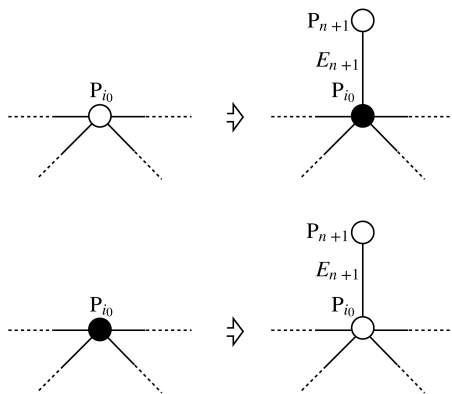


図 3

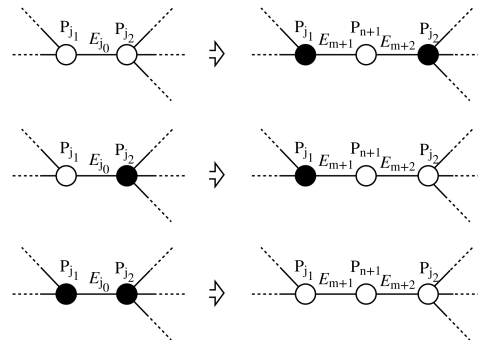


図 4

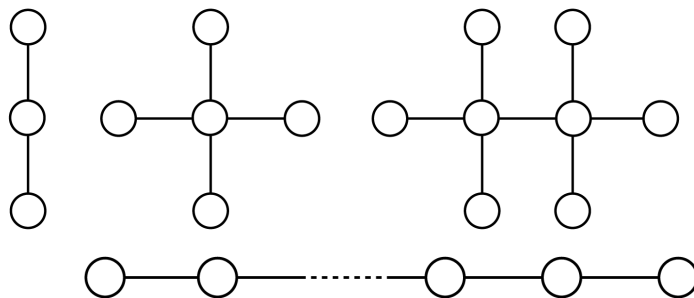


図 5

図 6

(1) 図 5 の 3 つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ. ここで, すべての頂点の色は白である.

- (2) n を自然数とすると、 n 個の頂点を持つ図 6 のような棒状グラフが可能グラフになるために n の満たすべき必要十分条件を求めよ。ここで、すべての頂点の色は白である。

▶ 解法 1 (操作に不変な偶奇方程式)

【方針】

(1) 実際の操作列を与える。(2) 十分性は n を 3 ずつ増やす構成で示す。必要性は、各頂点に 0 または 1 を置く連立偶奇条件を定め、2 種類の操作の前後で解が一对一に対応する不変量を作る。

【解答】

(1) 3 頂点の棒状グラフは、最初の白頂点に操作 1 を 2 回続けて施せば得られる。最初の頂点は 2 回色が反転して白に戻り、新しい 2 頂点も白である。

4 本の葉を持つ星形グラフは、最初の白頂点に操作 1 を 4 回施せば得られる。中心は 4 回反転して白、4 本の葉はすべて白である。

最後のグラフは次のように作れる。まず操作 1 で黒頂点と白頂点を結ぶ。白頂点に操作 1 を 3 回施すと、その頂点には白い葉が 3 本付き、中心と最初の頂点はともに黒になる。この 2 黒頂点を結ぶ辺に操作 2 を施すと、両者は白になり、間に白頂点が入る。最後にこの新しい白頂点に操作 1 を 2 回施す。すると 2 つの白い 4 価頂点が結ばれ、各々に白い葉が 3 本付いた所要のグラフになる。

(2)

まず十分性を示す。 $n = 1$ は出発グラフであり、 $n = 3$ は (1) で構成した。全白の棒状グラフ C_k が可能だとする。その端の白頂点に操作 1 を施し、次に新しくできた端の白頂点に操作 1 を施す。端には

... - 黒 - 黒 - 白

が並ぶ。2 個の黒頂点を結ぶ辺に操作 2 を施せば、4 頂点とも白の棒

... - 白 - 白 - 白 - 白

となり、頂点数は 3 増える。従って $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ ならば C_n は可能である。

(2) 必要性 各頂点 v に数 $x_v \in \{0, 1\}$ を対応させ、各頂点で

$$\varepsilon_v x_v + \sum_{w: w \text{ は } v \text{ と隣接}} x_w \equiv 0 \pmod{2}$$

を課す。ただし v が白なら $\varepsilon_v = 1$ 、黒なら $\varepsilon_v = 0$ とする。

操作 1 で頂点 v に白い新頂点 z を加えると、新頂点の式は

$$x_z + x_v \equiv 0,$$

すなわち $x_z = x_v$ である。これを色が反転した v の式に代入すると、反転で増減した x_v と x_z が打ち消し合い、操作前の v の式に戻る。従って操作前後の解は一对一に対応する。

操作 2 で辺 uv を白い新頂点 z で 2 分すると、新頂点の式は

$$x_z + x_u + x_v \equiv 0,$$

すなわち $x_z = x_u + x_v$ である。これを色が反転した u, v の式に代入すると、それぞれ操作前の式に戻る。従ってこの操作でも解は一对一に対応する。

出発グラフでは式は $x_1 = 0$ であり、解は零解だけである。従って可能グラフでは上の連立条件に非零解は存在しない。

ところが、全白の棒状グラフで $n = 3m + 2$ なら、左から

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots, 1, 1$$

と周期 3 で x_v を置くと非零解になる。実際、内部では連続する 3 項の和が偶数で、両端でも隣り合う 2 項の和が偶数である。これは可能グラフには非零解がないことに反する。

従って $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ が必要である。十分性と合わせて

$$n \equiv 0 \text{ または } 1 \pmod{3}$$

が必要十分条件である。

▶ 解法 2 (許容する $0 \cdot 1$ 印の個数を不変量にする)

【方針】

(1) は操作列を簡潔に指定する。(2) は各頂点へ $0 \cdot 1$ の印を置く規則を定め、その許容配置の個数が 2 種類の操作で変わらないことを示す。全白の棒では印が周期 3 で伝わるため、許容配置が 1 個になる長さを判定する。

【解答】

(1) 3 頂点の棒は、出発頂点に操作 1 を 2 回施せば得られる。4 本の葉を持つ星は、出発頂点に操作 1 を 4 回施せば得られる。

3 つ目のグラフは次の順に作る。まず出発頂点 A に操作 1 を施して白い頂点 B を加える。 B に操作 1 を 3 回施すと、 B に白い葉が 3 本付き、 A, B は黒になる。辺 AB に操作 2 を施して間に白い頂点 C を入れると、 A, B は白へ戻る。最後に C に操作 1 を 2 回施す。すると B, C が隣接する 2 つの 4 個頂点となり、各々に白い葉が 3 本付く。

(2) まず構成を示す。 $n = 1, 3$ の全白の棒は可能である。全白の n 頂点の棒の端に操作 1 を 2 回施すと、端に黒、黒、白の 3 頂点が続く。このうち黒と黒を結ぶ辺に操作 2 を施せば全部白となり、頂点数が 3 増える。従って

$$n \equiv 0, 1 \pmod{3}$$

なら構成できる。

次に必要性を示す。各頂点 v に $x_v = 0$ または 1 の印を置き、次の条件を課す。

$$\varepsilon_v x_v + \sum_{w: w \text{ は } v \text{ の隣}} x_w \equiv 0 \pmod{2},$$

ただし v が白なら $\varepsilon_v = 1$ 、黒なら 0 とする。この条件を満たす印の置き方を許容配置と呼ぶ。

操作 1 で新頂点 z を加えると、 z の条件から $x_z = x_v$ と一意に決まる。これを色が反転した v の条件へ戻すと、操作前の条件に一致する。操作 2 でも新頂点の条件

$$x_z = x_u + x_v$$

から新しい印が一意に決まり、両端の条件は操作前へ戻る。従って許容配置の個数はどちらの操作でも変わらない。出発グラフでは零配置の 1 個だけだから、可能グラフの許容配置も 1 個だけである。

全白の n 頂点の棒で、左端の印を t とする。左端条件から次の印も t 、内部条件から印は

$$t, t, 0, t, t, 0, \dots$$

と周期 3 で伝わる。右端条件まで自動的に満たされるのは $n \equiv 2 \pmod{3}$ のときであり、この場合は $t = 0, 1$ の 2 配置がある。これは可能グラフの許容配置が 1 個であることに反する。

従って必要十分条件は

$$n \equiv 0 \text{ または } 1 \pmod{3}$$

である。

【総評】 難度 10、計算量 5。必要性が本問の核心である。一般の行列式やグラフ理論の定理は使わず、 $0 \cdot 1$ の連立偶奇条件を各操作で直接追跡して不変性を証明した。構成側と不可能性側の両方を完結させた。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。