

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 1998 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a は 0 でない実数とする. 関数

$$f(x) = (3x^2 - 4) \left(x - a + \frac{1}{a} \right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ.

第 2 問

n を正の整数とする．連立不等式

$$\begin{cases} x + y + z \leq n \\ -x + y - z \leq n \\ x - y - z \leq n \\ -x - y + z \leq n \end{cases}$$

を満たす xyz 空間の点 $P(x, y, z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく．
極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ．

第 3 問

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり, C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする. さらに, $n = 2, 3, \dots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする. C_n の半径を r_n , C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \quad p_n = q_n x_n$$

とおく.

- (1) q_n は整数であることを示せ.
- (2) p_n も整数で, p_n と q_n は互いに素であることを示せ.
- (3) α を $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として, 不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha|$$

を示し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.

第 4 問

実数 a に対して $k \leq a < k + 1$ を満たす整数 k を $[a]$ で表す. n を正の整数として,

$$f(x) = \frac{x^2(2 \cdot 3^3 \cdot n - x)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2}$$

とおく. $36n + 1$ 個の整数

$$[f(0)], \quad [f(1)], \quad [f(2)], \quad \cdots, \quad [f(36n)]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ.

第 5 問

θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする. xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

をとり, 点 $P_n, Q_n, n = 1, 2, \dots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} = (1, 0) \\ \overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n})\vec{a} \\ \overrightarrow{OP_{n+1}} = 4\{\overrightarrow{OQ_n} - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n})\vec{b}\} \end{cases}$$

で定める. ただし, O は原点で, $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n}$ はベクトルの内積を表す. $\overrightarrow{OP_n} = (x_n, y_n)$ とおく. 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ. さらに, このような θ に対して, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

を求めよ.

第 6 問

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる. 四角錐 $PABCD$ の

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

を満たす部分の体積を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)