

東京大学 1998 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a は 0 でない実数とする. 関数

$$f(x) = (3x^2 - 4) \left(x - a + \frac{1}{a} \right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ.

▶ 解法 1 (導関数の負の部分積分)

【方針】

まず $t = a - 1/a$ とおき, a が入る場所を $x - t$ の平行移動成分だけに集約する. 導関数は 2 次式になり, 3 次関数の極大値と極小値の差は, 導関数が負になる区間で $-f'(x)$ を足し合わせることで求められる. したがって, 極値を直接代入するのではなく, 導関数の 2 つの零点 $\alpha < \beta$ とその間隔 $\beta - \alpha$ を求める. 最後は差が t^2 の増加関数になることを確認し, $a - 1/a = 0$ を解く.

【解答】

$t = a - 1/a$ とおく. すると $f(x) = (3x^2 - 4)(x - t)$ である. これを展開して微分すると $f'(x) = 9x^2 - 6tx - 4$ となる. $f'(x) = 0$ の 2 つの解を $\alpha < \beta$ とする. 解の公式より $\alpha = \frac{t - \sqrt{t^2 + 4}}{3}$, $\beta = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{3}$ である. よって $\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{t^2 + 4}}{3}$ である.

導関数 $f'(x)$ は上に開く 2 次式であり, $\alpha < x < \beta$ では負である. したがって $x = \alpha$ で極大, $x = \beta$ で極小をとる. 極大値と極小値の差は

$$f(\alpha) - f(\beta) = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx.$$

である. また $f'(x) = 9(x - \alpha)(x - \beta)$ だから, $h = \beta - \alpha$ とおき, $x = \alpha + u$ とすれば

$$\begin{aligned} - \int_{\alpha}^{\beta} 9(x - \alpha)(x - \beta) dx &= -9 \int_0^h u(u - h) du \\ &= 9 \int_0^h (hu - u^2) du \\ &= 9 \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \\ &= \frac{3}{2} h^3 \end{aligned}$$

である. したがって

$$f(\alpha) - f(\beta) = \frac{3}{2} \left(\frac{2\sqrt{t^2 + 4}}{3} \right)^3 = \frac{4}{9} (t^2 + 4)^{3/2}$$

となる.

これは t^2 が小さいほど小さく, 最小になるのは $t = 0$ のときである. すなわち $a - \frac{1}{a} = 0$ であり, $a \neq 0$ なので両辺に a を掛けて $a^2 - 1 = 0$ を得る. よって $a = 1, -1$ である.

▶ 解法 2 (平行移動して極値を直接比較)

【方針】

導関数の 2 根を使わず、 $t = a - 1/a$ と置いた後に $x = u + t/3$ と平行移動する。2 次項が消えた 3 次関数では停留点が原点対称に現れるため、2 つの極値を直接代入して差を求める。

【解答】

$t = a - 1/a$ とおくと

$$f(x) = 3x^3 - 3tx^2 - 4x + 4t$$

である。ここで

$$x = u + \frac{t}{3}$$

と平行移動する。展開して u によらない項を C とまとめると

$$f\left(u + \frac{t}{3}\right) = 3u^3 - (t^2 + 4)u + C$$

となる。

u で微分すれば

$$9u^2 - (t^2 + 4) = 0$$

だから、停留点は

$$u = \pm s, \quad s = \frac{\sqrt{t^2 + 4}}{3}$$

である。3 次の係数が正なので $u = -s$ で極大、 $u = s$ で極小となる。

$t^2 + 4 = 9s^2$ を使うと

$$\begin{aligned} f(-s + t/3) &= -3s^3 + 9s^3 + C = 6s^3 + C, \\ f(s + t/3) &= 3s^3 - 9s^3 + C = -6s^3 + C. \end{aligned}$$

従って極大値と極小値の差は

$$12s^3 = \frac{4}{9}(t^2 + 4)^{3/2}.$$

これは t^2 が最小のとき、すなわち $t = 0$ のときに最小となる。

$$a - \frac{1}{a} = 0$$

より $a^2 = 1$ であるから、求める値は

$$a = 1, -1$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 12 分。 $a - 1/a$ を 1 文字に置くと、問題は 3 次関数の極大値と極小値の差を導関数の 2 根の間隔で表す問題に変わる。極値を直接代入すると式が長くなるため、導関数が負の区間の面積として差を出すのが安定する。採点上は、 $f'(x)$ の符号からどちらが極大・極小かを確認すること、最後に $a \neq 0$ の条件のもとで $a = \pm 1$ を両方残すことが重要である。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 2 問】

n を正の整数とする．連立不等式

$$\begin{cases} x + y + z \leq n \\ -x + y - z \leq n \\ x - y - z \leq n \\ -x - y + z \leq n \end{cases}$$

を満たす xyz 空間の点 $P(x, y, z)$ で、 x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく．極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ．

▶ 解法 1 (四面体の体積と格子近似)

【方針】

右辺を正の実数 t とした領域を K_t とおく． K_1 の 4 頂点を求めると正四面体になるので、正三角形の底面積と高さから体積を求める．格子点数の極限は、各格子点を中心とする一辺 1 の立方体の合併を $K_{\frac{3}{n-2}}$ と $K_{\frac{3}{n+2}}$ で挟み、体積のはさみうちに帰着する．空間座標、立体の体積公式、はさみうちだけで完結させる。

【解答】

与えられた 4 本の不等式の右辺を正の実数 t とした領域を K_t とおく．まず K_1 の頂点を求める．4 つの境界平面から 3 つずつを選んで連立すると、

$$(1, 1, -1), \quad (-1, -1, -1), \quad (1, -1, 1), \quad (-1, 1, 1)$$

を得る．どの 2 頂点間の距離も $2\sqrt{2}$ だから、 K_1 は一辺 $2\sqrt{2}$ の正四面体である。

一辺を $s = 2\sqrt{2}$ とする．底面の正三角形の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = 2\sqrt{3}$$

である．底面の重心から底面の各頂点までの距離は $\frac{s}{\sqrt{3}}$ なので、正四面体の高さを h とすれば

$$h^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)^2 = s^2.$$

したがって $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$ であり、 K_1 の体積は

$$V(K_1) = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}$$

となる． K_t は K_1 を原点を中心として t 倍した立体だから、

$$V(K_t) = \frac{8}{3}t^3$$

である．

次に格子点数を体積と比較する． K_n 内の各格子点を中心として、各辺が座標軸に平行な一辺 1 の立方体を置き、その合併を U_n とする．これらの立方体は内部で重ならず、1 個の体積は 1 だから

$$V(U_n) = f(n)$$

である．

同じ立方体内の 2 点では、 $x + y + z$ など問題に現れる 4 つの一次式の値の差は、いずれも最大で $\frac{3}{2}$ である．したがって

$$U_n \subset K_{\frac{3}{n+\frac{1}{2}}}$$

である。逆に、 $K_{n-\frac{3}{2}}$ の任意の点について各座標に最も近い整数を選ぶと、その整数格子点では 4 つの一次式の値が高々 $\frac{3}{2}$ だけ増える。この格子点は K_n に属するので

$$K_{n-\frac{3}{2}} \subset U_n$$

となる。よって $n \geq 2$ で

$$\frac{8}{3} \left(n - \frac{3}{2} \right)^3 \leq f(n) \leq \frac{8}{3} \left(n + \frac{3}{2} \right)^3.$$

両辺を n^3 で割ると

$$\frac{8}{3} \left(1 - \frac{3}{2n} \right)^3 \leq \frac{f(n)}{n^3} \leq \frac{8}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^3.$$

はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = \frac{8}{3}$$

である。

▶ 解法 2 (立方体から 4 つの角を除く)

【方針】

K_1 は立方体 $-1 \leq x, y, z \leq 1$ の互い違いの 4 頂点を結ぶ四面体である。立方体から四隅の合同な直角四面体 4 個を除いて体積を求める。格子点極限は解法 1 と同じ単位立方体による上下からの はさみうちで厳密に処理し、空間座標と立体の体積公式だけで進める。

【解答】

右辺を正の実数 t とした領域を K_t とおく。 K_1 の頂点は

$$(1, 1, -1), \quad (-1, -1, -1), \quad (1, -1, 1), \quad (-1, 1, 1)$$

である。これらは立方体

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1$$

の互い違いの 4 頂点である。

立方体の体積は 8 である。 K_1 の外側には、立方体の残り 4 頂点をそれぞれ頂点とする合同な直角四面体が 4 個ある。各直角四面体では、1 つの頂点から出る互いに垂直な 3 辺の長さがすべて 2 である。底面を直角三角形と見れば、その面積は 2 で高さは 2 だから、1 個の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

である。したがって

$$V(K_1) = 8 - 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

K_t は K_1 の t 倍の相似な立体なので

$$V(K_t) = \frac{8}{3} t^3$$

となる。

K_n 内の各整数格子点を中心とする一辺 1 の立方体の合併を U_n とする。立方体 1 個の体積は 1 であり、異なる立方体の内部は重ならないから

$$V(U_n) = f(n)$$

である。

各立方体内では、問題に現れる 4 つの一次式の値は中心での値から高々 $\frac{3}{2}$ しか変化しない。さらに任意の点の各座標を最も近い整数へ丸めても、4 つの一次式の値の変化は高々 $\frac{3}{2}$ である。したがって $n \geq 2$ で

$$K_{n-\frac{3}{2}} \subset U_n \subset K_{n+\frac{3}{2}}.$$

体積を比較すると

$$\frac{8}{3} \left(n - \frac{3}{2} \right)^3 \leq f(n) \leq \frac{8}{3} \left(n + \frac{3}{2} \right)^3.$$

これを n^3 で割り、 n を限りなく大きくすれば、左右はいずれも $\frac{8}{3}$ に近づく。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = \frac{8}{3}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。連立一次不等式が作る立体を、右辺に比例して拡大する正四面体と見抜くことが第一の得点点である。体積は正三角形の底面積と高さ、または立方体から 4 個の直角四面体を除く方法で高校範囲のまま求められる。極限では「境界の影響は小さい」とだけ書かず、格子点を中心とする単位立方体を $K_{n-\frac{3}{2}}$ と $K_{n+\frac{3}{2}}$ で挟むことが完答の要点である。典型的な失点は、正四面体の高さ、直角四面体の係数 $\frac{1}{3}$ 、一次式の最大変化 $\frac{3}{2}$ の取り違えである。全過程を空間座標、立体の体積公式、はさみうちだけで記述できる。

【第 3 問】

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり、 C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする。さらに、 $n = 2, 3, \dots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。 C_n の半径を r_n 、 C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として、

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \quad p_n = q_n x_n$$

とおく。

- (1) q_n は整数であることを示せ。
- (2) p_n も整数で、 p_n と q_n は互いに素であることを示せ。
- (3) α を $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として、不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3} |x_n - \alpha|$$

を示し、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

▶ 解法 1 (接円条件から漸化式を作る)

【方針】

x 軸に接する円は、接点 $(x, 0)$ と半径 r で決まる。2 つのそのような円が外接する条件を中心間距離で書くと、接点間の距離が $2\sqrt{r_1 r_2}$ になる。そこで $r = 1/(2q^2)$, $x = p/q$ と置くと、接する条件は $|p_1 q_2 - p_2 q_1| = 1$ という整数条件になる。隣り合う 2 円から生じる新しい円は分子・分母を足した $p = p_{n-1} + p_n$, $q = q_{n-1} + q_n$ で表されるので、整数性・互いに素を帰納法で示す。最後は $x_{n+1} = 1/(1+x_n)$ と固定点 α の差を評価して収束を示す。

【解答】

(1) x 軸に接し、接点が $(x, 0)$ 、半径が r である円の中心は (x, r) である。2 つの円がともに x 軸に接し、互いに外接するとき、接点の x 座標を x_1, x_2 、半径を r_1, r_2 とすると $(x_1 - x_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$ である。整理して $(x_1 - x_2)^2 = 4r_1 r_2$ すなわち $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{r_1 r_2}$ を得る。 C_0, C_1 については $x_0 = 0$, $r_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, $r_1 = \frac{1}{2}$ であるから $(p_0, q_0) = (0, 1)$, $(p_1, q_1) = (1, 1)$ と表せる。さらに C_2 は 2 つの円の間で x 軸に接する円であり、計算すると $x_2 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{8}$ なので $(p_2, q_2) = (1, 2)$ である。

いま隣り合う 2 円が $x_i = \frac{p_i}{q_i}$, $r_i = \frac{1}{2q_i^2}$ と表され、かつ $|p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i| = 1$ を満たすとする。この 2 円に接する新し

い円について $p = p_{i-1} + p_i$, $q = q_{i-1} + q_i$ とおくと

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_i}{q_i} \right| = \frac{|p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1}|}{qq_i} = \frac{1}{qq_i}$$

である。一方、半径を $r = 1/(2q^2)$ とすれば $2\sqrt{rr_i} = 2\sqrt{\frac{1}{2q^2} \cdot \frac{1}{2q_i^2}} = \frac{1}{qq_i}$ であり、接点間距離の条件を満たす。同様に C_{i-1} とも接する。したがって新しい円は $(p, q) = (p_{i-1} + p_i, q_{i-1} + q_i)$ で与えられる。

よって $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$ である。 $q_0 = q_1 = 1$ から、数学的帰納法によりすべての q_n は整数である。

(2) 同じ理由で $p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$ であり、 $p_0 = 0, p_1 = 1$ だから、すべての p_n は整数である。

また隣り合う円が接する条件から $|p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n| = 1$ が成り立つ。もし p_n と q_n が 1 より大きい公約数をもてば、左辺 $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n$ もその公約数で割り切れる。しかし左辺の絶対値は 1 なので不可能である。したがって p_n と q_n は互いに素である。

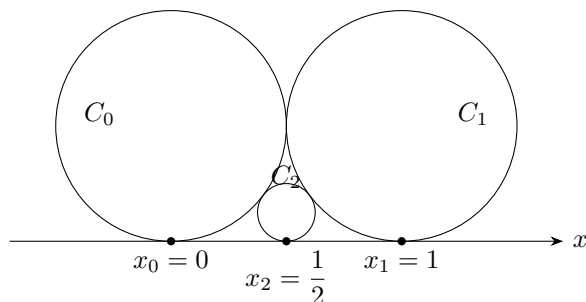
(3) p_n と q_n は同じ漸化式を満たし、初期値を比べると $p_n = q_{n-1}$ ($n \geq 1$) である。したがって $x_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n}$ で

あり、 $x_{n+1} = \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{q_n}{q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{1 + x_n}$ となる。 α は $\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}$ を満たす正の数である。よって

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| &= \left| \frac{1}{1 + x_n} - \frac{1}{1 + \alpha} \right| \\ &= \frac{|x_n - \alpha|}{(1 + x_n)(1 + \alpha)} \end{aligned}$$

である。ここで $x_n \geq 0$ であり、また α は正で $\alpha^2 + \alpha = 1$ を満たすから $\alpha > 1/2$ である。したがって $(1 + x_n)(1 + \alpha) > \frac{3}{2}$ であり、 $|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha|$ が成り立つ。

この不等式をくり返すと、 $|x_n - \alpha|$ は 0 に近づく。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ である。 $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ を解くと、正の解は $\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ である。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ である。



▶ 解法 2 (フィボナッチ数で円を明示)

【方針】

フィボナッチ数 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ を用い、接点と半径を $x_n = F_n/F_{n+1}$ 、 $r_n = 1/(2F_{n+1}^2)$ と予想して帰納法で確かめる。隣接項の差が 1 になる恒等式から接触・互いに素を同時に処理する。

【解答】

(1) $F_0 = 0, F_1 = 1$ とし、

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

でフィボナッチ数を定める。次を示す。

$$x_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}, \quad r_n = \frac{1}{2F_{n+1}^2}.$$

$n = 0, 1$ では問題の 2 円から明らかである。

x 軸に接する半径 r, s の 2 円が外接するための条件は、接点の横座標の差が $2\sqrt{rs}$ となることである。またフィボナッチ数について

$$|F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2| = 1$$

が帰納法で成り立つ。

$$\frac{F_{n-1}}{F_n} \quad \text{と} \quad \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

の間にある分数は

$$\frac{F_{n-1} + F_n}{F_n + F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

この分数と両端との差はそれぞれ

$$\frac{1}{F_n F_{n+2}}, \quad \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}}$$

であり、半径を $1/(2F_{n+2}^2)$ とすれば、ちょうど $2\sqrt{rs}$ に一致する。従って帰納法により上の表示が成り立つ。

よって

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}} = F_{n+1}$$

は整数である。

(2)

$$p_n = q_n x_n = F_n$$

も整数である。ユークリッドの互除法から

$$(F_n, F_{n+1}) = (F_{n-1}, F_n) = \cdots = (F_0, F_1) = 1$$

なので、 p_n, q_n は互いに素である。

(3)

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

$\alpha = 1/(1 + \alpha)$ を使うと

$$|x_{n+1} - \alpha| = \frac{|x_n - \alpha|}{(1 + x_n)(1 + \alpha)}.$$

$x_n \geq 0$ かつ $\alpha > 1/2$ なので分母は $3/2$ より大きく、

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3} |x_n - \alpha|.$$

従って $x_n \rightarrow \alpha$ である。正の解を選べば

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30 分。円の接し方を、接点 p/q と半径 $1/(2q^2)$ で表す発想が山場である。接点間距離 $2\sqrt{r_1 r_2}$ から $|p_1 q_2 - p_2 q_1| = 1$ が出ると、分子・分母を足す規則が自然に見える。(2) では互いに素を単独で示すのではなく、隣り合う円の接触条件の絶対値 1 を使う。(3) は漸化式 $x_{n+1} = 1/(1+x_n)$ に落ちた後、固定点との差が毎回 $2/3$ 未満に縮むことを明記すればよい。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 4 問】

実数 a に対して $k \leq a < k+1$ を満たす整数 k を $[a]$ で表す。 n を正の整数として、

$$f(x) = \frac{x^2(2 \cdot 3^3 \cdot n - x)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2}$$

とおく。 $36n+1$ 個の整数

$$[f(0)], \quad [f(1)], \quad [f(2)], \quad \dots, \quad [f(36n)]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

▶ 解法 1 (導関数で 3 区間に分ける)

【方針】

まず導関数を求め、 $0 \leq x \leq 36n$ で f が単調増加することを確認する。次に端点 $0, 12n, 24n, 36n$ での値を計算し、区間を 3 つに分ける。左右の区間では隣り合う整数入力での増加量が 1 未満なので床関数の値は整数を飛ばさず、中央の区間では増加量が 1 より大きく 2 未満なので床関数の値は毎回変わるが一部の整数を飛ばす。最後に端点の重複、特に $7n$ と $20n$ の数え方を調整して相異なる個数を合計する。

【解答】

微分すると $f'(x) = \frac{x(36n-x)}{288n^2}$ である。したがって $0 \leq x \leq 36n$ で $f'(x) \geq 0$ であり、 $f(x)$ はこの区間で単調増加する。

端点の値を計算すると $f(0) = 0$, $f(12n) = 7n$, $f(24n) = 20n$, $f(36n) = 27n$ である。

まず $0 < x < 12n$ では $0 < f'(x) < 1$ である。したがって、整数 x を 1 増やしたときの $f(x)$ の増加量は 1 未満である。 $f(0) = 0$, $f(12n) = 7n$ で両端が整数なので、 $[f(x)]$ は $0, 1, 2, \dots, 7n$ をすべてとり、個数は $7n+1$ である。

同様に $24n < x < 36n$ でも $0 < f'(x) < 1$ であり、 $f(24n) = 20n$, $f(36n) = 27n$ であるから、この区間では $20n, 20n+1, \dots, 27n$ をすべてとる。

次に中央の区間 $12n < x < 24n$ を見る。この区間では $1 < f'(x) \leq \frac{9}{8} < 2$ である。したがって整数 x を 1 増やすたびに $f(x)$ は 1 より大きく、2 より小さく増える。よって $[f(x)]$ は毎回必ず変わる。中央区間の整数入力は $12n, 12n+1, \dots, 24n$ の $12n+1$ 個であり、その最初の値は $7n$ 、最後の値は $20n$ である。

以上を重複に注意して足す。左区間で 0 から $7n$ まで $7n+1$ 個を数える。中央区間は $12n+1$ 個あるが、最初の $7n$ は左区間で数えたので、新しく増えるのは $12n$ 個である。右区間は $20n$ から $27n$ まで $7n+1$ 個あるが、 $20n$ は中央区間の最後で数えたので、新しく増えるのは $7n$ 個である。

したがって相異なる値の個数は $(7n+1) + 12n + 7n = 26n+1$ である。

▶ 解法 2 (整数点間の差を直接調べる)

【方針】

導関数ではなく $\Delta_k = f(k+1) - f(k)$ を計算する。 $\Delta_k < 1$ となる左右の区間では床の値が整数を飛ばさず、 $\Delta_k > 1$ となる中央では毎回異なることを、整数 k ごとに直接判定する。

【解答】

整数 $k = 0, 1, \dots, 36n - 1$ に対して

$$\Delta_k = f(k+1) - f(k) = \frac{54n(2k+1) - (3k^2 + 3k + 1)}{864n^2}$$

である。 $\Delta_k - 1$ の分子は最高次係数が負の 2 次式で、対称軸は $k = 18n - 1/2$ である。境界の整数で値を調べると

k	$12n - 1$	$12n$	$24n - 1$	$24n$
$864n^2(\Delta_k - 1)$	$-90n - 1$	$18n - 1$	$18n - 1$	$-90n - 1$

となる。従って

$$\begin{cases} 0 < \Delta_k < 1 & (0 \leq k \leq 12n - 1, 24n \leq k \leq 36n - 1), \\ 1 < \Delta_k < 2 & (12n \leq k \leq 24n - 1). \end{cases}$$

上側の評価 $\Delta_k < 2$ は、この 2 次式の最大値が $9/8$ より小さいことから分かる。

また

$$f(0) = 0, \quad f(12n) = 7n, \quad f(24n) = 20n, \quad f(36n) = 27n.$$

最初の区間では増加量が 1 未満で両端が整数だから、床の値は

$$0, 1, \dots, 7n$$

をすべて取り、 $7n + 1$ 種類である。

中央では入力 $12n, 12n + 1, \dots, 24n$ の $12n + 1$ 個あり、増加量が 1 より大きいので床の値はすべて異なる。最初の $7n$ は既に数えたため、新しく $12n$ 種類増える。

最後の区間では $20n, 20n + 1, \dots, 27n$ をすべて取り、 $20n$ を除く $7n$ 種類が新しい。従って総数は

$$(7n + 1) + 12n + 7n = 26n + 1$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 24 分。床関数の値の種類を、導関数の大きさに「飛ばさない区間」と「毎回変わる区間」に分ける問題である。 $12n, 24n$ で区切ると端点値がすべて整数になり、数え上げが明確になる。中央区間では床関数の値が毎回異なる一方、整数を飛ばす可能性があるため、範囲内の全整数をとるとは言うてはいけない。最後は $7n, 20n$ の重複をどちら側で数えるかを明示することが大切である。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 5 問】

θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする. xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

をとり, 点 $P_n, Q_n, n = 1, 2, \dots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} = (1, 0) \\ \overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n})\vec{a} \\ \overrightarrow{OP_{n+1}} = 4\{\overrightarrow{OQ_n} - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n})\vec{b}\} \end{cases}$$

で定める. ただし, O は原点で, $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n}$ はベクトルの内積を表す. $\overrightarrow{OP_n} = (x_n, y_n)$ とおく. 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ. さらに, このような θ に対して, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

を求めよ.

▶ 解法 1 (2 つの直交射影を合成)
【方針】

$\overrightarrow{OQ_n}$ は $\overrightarrow{OP_n}$ から $\vec{a}$ 方向成分を引いたものなので, $\vec{a}$ に垂直な方向への射影である. 同様に $\overrightarrow{OP_{n+1}}$ は $\vec{b}$ に垂直な方向への射影を 4 倍したものになる. そこで $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{b}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{v}$ を置くと, $n \geq 2$ ではすべて $\vec{v}$ 方向の等比数列になる. 公比 $4 \cos^2(\theta - \pi/6)$ が 1 以下なら収束し, 1 より大きい場合は第 2 項が 0 になる例外だけを加える. 端点では公比が 1 なので, $\overrightarrow{OP_2}$ を直接計算して極限を出す.

【解答】

$\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{u} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ とおく. また $\vec{b} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおく. $\overrightarrow{OQ_n}$ は $\overrightarrow{OP_n}$ のうち $\vec{a}$ に垂直な成分であるから $\overrightarrow{OQ_n} = (\overrightarrow{OP_n} \cdot \vec{u})\vec{u}$ である. さらに $\overrightarrow{OP_{n+1}}$ は $\overrightarrow{OQ_n}$ のうち $\vec{b}$ に垂直な成分を 4 倍したものであるから $\overrightarrow{OP_{n+1}} = 4(\overrightarrow{OQ_n} \cdot \vec{v})\vec{v}$ である.

ここで

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$$

である. $n \geq 2$ では, $\overrightarrow{OP_n}$ は $\vec{v}$ に平行である. $\overrightarrow{OP_n} = c_n \vec{v}$ と書くと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_{n+1}} &= 4\{(c_n \vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} \cdot \vec{v}\}\vec{v} \\ &= 4c_n(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \vec{v} \end{aligned}$$

である. したがって

$$\overrightarrow{OP_{n+1}} = 4 \cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \overrightarrow{OP_n} \quad (n \geq 2)$$

である.

公比を $R = 4 \cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$ とおく. $R \leq 1$ なら, $n \geq 2$ で $\overrightarrow{OP_n}$ は収束する. これは $\left| \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right| \leq \frac{1}{2}$ と同値であり, $0 \leq \theta < 2\pi$ では

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$$

である.

一方, $R > 1$ でも $\overrightarrow{OP_2} = \vec{0}$ なら以後すべて 0 で収束する. $\overrightarrow{OP_1} = (1, 0)$ だから $\overrightarrow{OP_2} = 4\{((1, 0) \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{v})\}\vec{v}$ である. $R > 1$ の範囲では $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$ なので, $\overrightarrow{OP_2} = \vec{0}$ は $(1, 0) \cdot \vec{u} = -\sin \theta = 0$ と同値である. よって $\theta = 0, \pi$ が加わる.

したがって, 収束する θ は $\theta = 0, \pi$ または

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$$

である.

極限を求める。 $R < 1$ のとき、および $\theta = 0, \pi$ のときは $\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{OP_n} = \vec{0}$ である。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ である。

残るのは $R = 1$ の端点である。このとき $n \geq 2$ では $\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OP_2}$ で一定である。 $\overrightarrow{OP_2}$ を計算すると、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のとき $\overrightarrow{OP_2} = -2\vec{v} = (1, -\sqrt{3})$ である。また $\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ のとき $\overrightarrow{OP_2} = \vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

以上より、端点ではそれぞれ $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = (1, -\sqrt{3})$ または

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

であり、それ以外の収束範囲では $(0, 0)$ である。

▶ 解法 2 (第 2 項以降の一般項を明示)

【方針】

2 つの射影を座標計算し、第 2 項以降が固定ベクトル $\vec{v}$ の実数倍であることを使う。その係数の一般項を明示して、等比数列が収束する条件、初項が 0 になる例外、公比 1 の端点を分ける。

【解答】

$\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルと $\vec{b}$ に垂直な単位ベクトルを

$$\vec{u} = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad \vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とする。射影の定義から

$$\overrightarrow{OP_{n+1}} = 4(\overrightarrow{OP_n} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}.$$

ここで

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right).$$

$n \geq 2$ では $\overrightarrow{OP_n}$ は $\vec{v}$ に平行である。さらに

$$\overrightarrow{OP_2} = -4 \sin \theta \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \vec{v}.$$

従って $n \geq 2$ で

$$\overrightarrow{OP_n} = -4 \sin \theta \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \left\{4 \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\}^{n-2} \vec{v}.$$

公比

$$R = 4 \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

は非負である。 $0 \leq R < 1$ なら極限は $\vec{0}$ 、 $R = 1$ なら第 2 項以降一定、 $R > 1$ なら係数が 0 の場合に限って収束する。

$R \leq 1$ は

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$$

である。 $R > 1$ で係数が 0 になるのは $\sin \theta = 0$ の

$$\theta = 0, \pi$$

である。

$R < 1$ と $\theta = 0, \pi$ では

$$\lim x_n = \lim y_n = 0.$$

$R = 1$ の 4 端点では一般項へ直接代入して

θ	$(\lim x_n, \lim y_n)$
$\pi/2, 3\pi/2$	$(1, -\sqrt{3})$
$5\pi/6, 11\pi/6$	$(-1/2, \sqrt{3}/2)$

となる。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 22 分。2 回の「垂直成分を取り出す」操作を、方向 $\vec{v}$ 上の等比数列に落とすのが中心である。 $n \geq 2$ で常に $\vec{b}$ に垂直な同一直線上に乗ることを明示すると、公比 $4\cos^2(\theta - \pi/6)$ が自然に出る。 $R < 1$ と $R = 1$ では極限が異なり、さらに $R > 1$ でも $\theta = 0, \pi$ だけは第 2 項から 0 になる。この例外と端点の極限値を落とさないことが採点上の注意点である。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。

【第 6 問】

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる。四角錐 $PABCD$ の

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

を満たす部分の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (底面上の高さを直交座標で積分)

【方針】

四角錐の底面は正方形 $-1 \leq x, y \leq 1$ 、頂点は高さ 3 にある。底面上の点 (x, y) での四角錐の高さは、正方形の相似な断面を考えると $3(1 - \max(|x|, |y|))$ である。求める部分は円 $x^2 + y^2 < 1$ の内側を除いた部分なので、対称性で $0 \leq y \leq x \leq 1$ の 8 分の 1 領域に絞る。この領域では高さが $3(1 - x)$ となり、条件 $x^2 + y^2 \geq 1$ から $1/\sqrt{2} \leq x \leq 1$, $\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x$ を積分範囲にする。

【解答】

底面は正方形 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ であり、頂点 P の高さは 3 である。底面上の点 (x, y) の上にある四角錐の高さを考える。高さ z の水平断面は、底面の正方形を中心から相似に縮めた正方形であり、その半辺は $1 - \frac{z}{3}$ である。したがって点 (x, y) がその断面の内側にある条件は $\max(|x|, |y|) \leq 1 - \frac{z}{3}$ である。よって、その点での高さは $z = 3(1 - \max(|x|, |y|))$ である。

対称性により、 $0 \leq y \leq x \leq 1$ の部分を 8 倍して考える。この部分では $\max(|x|, |y|) = x$ なので、高さは $3(1 - x)$ である。さらに条件 $x^2 + y^2 \geq 1$ を満たす部分を取る。 $0 \leq y \leq x$ で円の外側にあるには、まず x が $1/\sqrt{2}$ 以上でなければならない。よって範囲は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$, $\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x$ である。

したがって求める体積 V は

$$V = 8 \int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x 3(1-x) dy dx.$$

である。内側の積分を行うと

$$V = 24 \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-x) (x - \sqrt{1-x^2}) dx.$$

である。

ここで

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-x)x dx = \frac{\sqrt{2}-1}{12}$$

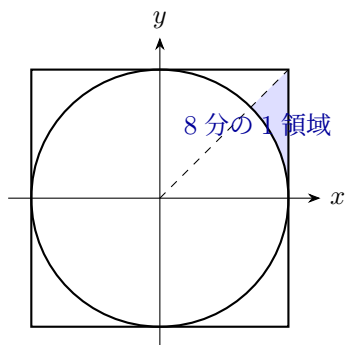
であり、また

$$\begin{aligned} \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-x)\sqrt{1-x^2} dx &= \int_{1/\sqrt{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_{1/\sqrt{2}}^1 x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} V &= 24 \left\{ \frac{\sqrt{2}-1}{12} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right\} \\ &= 24 \left(\frac{\sqrt{2}+1}{6} - \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi \end{aligned}$$

である。



▶ 解法 2 (極座標による扇形分割)

【方針】

底面の 8 分の 1、 $0 \leq \phi \leq \pi/4$ に絞って極座標を使う。円の外側では $1 \leq r \leq 1/\cos \phi$ 、四角錐の高さは $3(1 - r \cos \phi)$ である。面積要素 $r dr d\phi$ を掛けて積分する。

【解答】

対称性から、底面上で

$$0 \leq y \leq x \leq 1$$

の部分をも 8 倍すればよい。極座標

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

を用いると

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}.$$

円 $x^2 + y^2 = 1$ の外側かつ正方形の内側という条件は

$$1 \leq r \leq \frac{1}{\cos \phi}$$

である。

この範囲では $x \geq y \geq 0$ なので、底面の点 (x, y) の上にある四角錐の高さは

$$3(1 - x) = 3(1 - r \cos \phi).$$

極座標の面積要素を使うと、体積は

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\pi/4} \int_1^{1/\cos \phi} 3(1 - r \cos \phi) r dr d\phi \\ &= 8 \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2 \cos^2 \phi} - \frac{3}{2} + \cos \phi \right) d\phi. \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} V &= 8 \left[\frac{1}{2} \tan \phi - \frac{3}{2} \phi + \sin \phi \right]_0^{\pi/4} \\ &= 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 25 分。四角錐の高さを底面上の関数 $3(1 - \max(|x|, |y|))$ と表すことが第一の山である。対称性で $0 \leq y \leq x \leq 1$ に絞ると高さが $3(1 - x)$ になり、円の外側という条件も $\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x$ と明確になる。最後の積分では、 π が出る部分と代数的な部分を分けて計算すると符号を誤りにくい。第 2 解法の扇形分割を使う場合も、面積要素に対応する r の係数を忘れないこと。2 解法の数式と最終結論を相互照合し、原典本文との対応、小問の完答、境界条件、図の読み取りを再確認した。