

入 学 試 験 問 題



数 学

東京大学 1999 年度理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

- (1) n を正の整数とする. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin nx}{\sin x} & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x \neq 0 \\ c_n & x = 0 \end{cases}$$

とおくことにより定義される関数 $f_n(x)$ が, 連続関数となるように定数 c_n の値を定めよ.

- (2) $f_3(x)$ は $\cos x$, $\cos 2x$ 等を用いて表せることを示し, 定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_3(x) dx$$

の値を求めよ.

- (3) 任意の正の整数 n に対して, 定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x) dx$$

の値を求めよ.

第 2 問

座標平面上の原点を $O(0, 0)$ とする. また x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という.

- (1) t を正の実数とする. 点 $P(-1, 0)$ を通り, 傾きが t の直線と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ との P 以外の交点を $Q(t)$ とする. $Q(t)$ の座標を求めよ. つぎに, $0 < s < t$ を満たす 2 つの実数 s, t に対し, 線分 $Q(s)Q(t)$ の長さを求めよ.

- (2) $\angle Q(s)PO = \alpha$, $\angle Q(t)PO = \beta$ とし

$$u = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad v = \tan \frac{\beta}{2}$$

とおく. もし u, v がともに有理数ならば, 線分 $Q(s)Q(t)$ の長さもまた有理数となることを示せ.

- (3) 任意に与えられた 3 以上の整数 n に対し, つぎの条件 (C1), (C2), (C3) をすべて満たす n 個の異なる点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ が, 座標平面上に存在することを証明せよ.

(C1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ はすべて格子点である.

(C2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ のどの異なる 3 点も一直線上にない.

(C3) $A_1, A_2, \dots, A_n$ のどの異なる 2 点 A_i, A_j に対しても, 線分 $A_i A_j$ の長さは整数である.

第 3 問

座標平面上にある 2 つの四角形 $ABCD$ と $A'B'C'D'$ が相似であるとは、対応する 4 つの頂点における内角がそれぞれ等しく、かつ対応する辺の長さの比がすべて等しいこととする。このとき

$$\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$$

と書く。ただし、四角形 $ABCD$ と書くときには、4 つの頂点 A, B, C, D は図のようにつねに時計と反対回りに並んでいるものとし、また四角形は周および内部を込めて考えるものとする。

四角形 $A_0B_0C_0D_0$ が与えられたとき、この四角形から出発して、任意の整数 n に対して四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を以下のように帰納的に定める。

(I) $n = 0$ のときは、与えられた四角形 $A_0B_0C_0D_0$ とする。

(II) $n > 0$ のときは、四角形 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ まで定まったとして、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を

$$A_n = D_{n-1}, \quad B_n = C_{n-1} \quad \text{かつ} \quad \square A_nB_nC_nD_n \sim \square A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$$

となる四角形として定める。

(III) $n < 0$ のときは、 $0, -1, \dots$ と負の向きに進んで、四角形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ まで定まったとして、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を

$$D_n = A_{n+1}, \quad C_n = B_{n+1} \quad \text{かつ} \quad \square A_nB_nC_nD_n \sim \square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$$

となる四角形として定める。

こうして定まった四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を K_n と書くことにする。

さて、座標平面上の 3 点

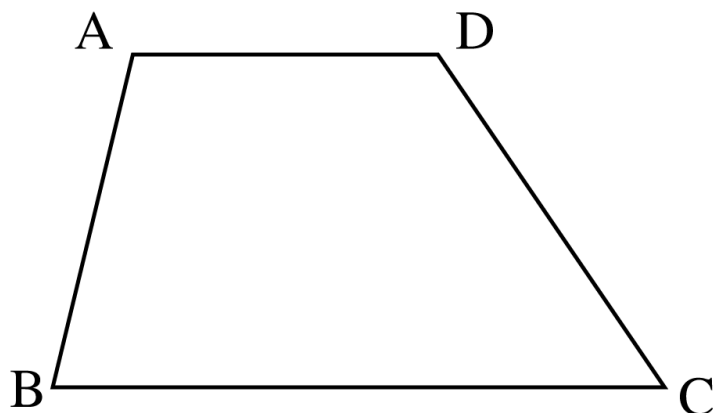
$$A_0(2, 1), \quad B_0(8, 4), \quad P(4, 12)$$

を考える。原点を O とし、線分 OP 上に原点以外の 1 点 C_0 をとる。点 A_0 から線分 B_0C_0 に平行にひいた直線と、線分 OP との交点を D_0 とする。このようにして定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して、上記のようにして得られる四角形の系列

$$\dots, \quad K_{-2}, \quad K_{-1}, \quad K_0, \quad K_1, \quad K_2, \quad \dots$$

について考える。

- (1) $\angle B_0OP$ を求めよ.
- (2) 線分 OP 上のある点 C_0 をえらび, それにより定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して, 四角形の系列 $\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$ を作ったところ, ある 0 でない整数 n が存在して, $K_n = K_0$ となったという. このとき, 点 C_0 の座標を求めよ. また, $K_n = K_0$ となる整数 n の値をすべて求めよ.
- (3) 線分 OP 上のある点 C_0 をえらび, それにより定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して, 四角形の系列 $\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$ を作ったところ, これら四角形が座標平面から原点を除いた部分を, 辺と頂点以外には互いに重なることなく, すき間なくおおったという. このような性質をもつ点 C_0 をすべて求め, それらの座標を記せ. またそれらの場合のおおのについて, 点 $(100, 50)$ が K_n に含まれるような整数 n の値をすべて求めよ.



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)