

東京大学 1999 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

- (1) n を正の整数とする. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin nx}{\sin x} & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x \neq 0 \\ c_n & x = 0 \end{cases}$$

とおくことにより定義される関数 $f_n(x)$ が, 連続関数となるように定数 c_n の値を定めよ.

- (2) $f_3(x)$ は $\cos x$, $\cos 2x$ 等を用いて表せることを示し, 定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_3(x) dx$$

の値を求めよ.

- (3) 任意の正の整数 n に対して, 定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x) dx$$

の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は標準極限で原点の連続値を決める。(2)(3) は $\sin((2n+1)x)/\sin x$ を有限個の余弦の和へ変形する。対称区間では定数項以外の余弦積分が 0 になるため、積分値が直ちに決まる。

【解答】

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin x} = n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx} \frac{x}{\sin x} = n.$$

従って連続となるための値は

$$c_n = n$$

である。

(2) 加法定理から

$$\sin 3x = \sin x(1 + 2 \cos 2x)$$

なので

$$f_3(x) = 1 + 2 \cos 2x$$

である。 $x = 0$ でも両辺は 3 となり一致する。従って

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_3(x) dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2x) dx \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(3) 任意の正の整数 n に対し

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2kx$$

が成り立つ。これは右辺に $\sin x$ を掛け、積和公式を用いれば望遠的に $\sin(2n+1)x$ となることから分かる。 $x = 0$ でも連続値 $2n+1$ と一致する。

各 $k \geq 1$ について

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2kx \, dx = \frac{\sin k\pi}{k} = 0.$$

従って

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{2n+1}(x) \, dx = \pi.$$

▶ 解法 2

【方針】

奇数添字の関数について、正弦の差の公式から $f_{2n+3} = f_{2n+1} + 2 \cos(2n+2)x$ という漸化式を作る。追加される余弦の定積分が 0 なので、基準 $f_1 = 1$ から全ての積分が同じであることを帰納する。

【解答】

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin x} = n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx} \frac{x}{\sin x} = n$$

なので、連続にするには $c_n = n$ とすればよい。

(2) 正弦の差の公式から

$$\sin 3x - \sin x = 2 \cos 2x \sin x$$

である。従って

$$f_3(x) = 1 + 2 \cos 2x$$

であり、 $x = 0$ でも両辺は 3 で一致する。よって

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_3(x) \, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2x) \, dx \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(3) 同様に

$$\sin(2n+3)x - \sin(2n+1)x = 2 \cos(2n+2)x \sin x$$

だから、連続値も含め

$$f_{2n+3}(x) = f_{2n+1}(x) + 2 \cos(2n+2)x$$

である。ところが

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2n+2)x \, dx = \left[\frac{\sin(2n+2)x}{2n+2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0.$$

従って奇数添字の積分は添字を 2 増やしても変わらない。 $f_1(x) = 1$ を基準に帰納すれば

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{2n+1}(x) \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dx = \pi.$$

【総評】 奇数次の正弦商は、定数項 1 と偶数倍角の余弦の和になる。対称区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ では各余弦項の積分が 0 になるため、全ての積分が π となる。 $x = 0$ は式の見かけ上未定義だが、1 点の値だけでなく連続関数としての値 $c_n = n$ を明記した。

【第 2 問】

座標平面上の原点を $O(0,0)$ とする. また x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という.

- (1) t を正の実数とする. 点 $P(-1,0)$ を通り, 傾きが t の直線と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ との P 以外の交点を $Q(t)$ とする. $Q(t)$ の座標を求めよ. つぎに, $0 < s < t$ を満たす 2 つの実数 s, t に対し, 線分 $Q(s)Q(t)$ の長さを求めよ.

- (2) $\angle Q(s)PO = \alpha$, $\angle Q(t)PO = \beta$ とし

$$u = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad v = \tan \frac{\beta}{2}$$

とおく. もし u, v がともに有理数ならば, 線分 $Q(s)Q(t)$ の長さもまた有理数となることを示せ.

- (3) 任意に与えられた 3 以上の整数 n に対し, つぎの条件 (C1), (C2), (C3) をすべて満たす n 個の異なる点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ が, 座標平面上に存在することを証明せよ.

(C1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ はすべて格子点である.

(C2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ のどの異なる 3 点も一直線上にない.

(C3) $A_1, A_2, \dots, A_n$ のどの異なる 2 点 A_i, A_j に対しても, 線分 $A_i A_j$ の長さは整数である.

▶ 解法 1

【方針】

直線と単位円の交点を代入で求め, 2 点間距離を整理する. 半角 u, v が有理数なら $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta$ が有理数で, 弦長 $2\sin(\beta - \alpha)$ も有理数になる. 有限個の有理点を一斉に整数倍して格子点を作る.

【解答】

- (1) 直線は

$$y = t(x + 1)$$

である. これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入し, 既知の根 $x = -1$ を除くと

$$Q(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right).$$

従って $0 < s < t$ のとき, 座標差を計算して

$$|Q(s)Q(t)| = \frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}.$$

- (2) 直線 $PQ(s)$ の傾きは s だから

$$s = \tan \alpha, \quad t = \tan \beta.$$

$u = \tan(\alpha/2)$ が有理数なら

$$\sin \alpha = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

はともに有理数である. 同様に v が有理数なら $\sin \beta, \cos \beta$ も有理数である.

点 $Q(s), Q(t)$ の単位円上での偏角はそれぞれ $2\alpha, 2\beta$ なので, その弦長は

$$|Q(s)Q(t)| = 2\sin(\beta - \alpha).$$

ここで

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$$

は有理数である. 従って弦長も有理数である.

- (3) $0 < u_1 < \dots < u_n < 1$ を満たす相異なる有理数を選ぶ. 例えば

$$u_j = \frac{j}{n+1}$$

でよい. $u_j = \tan(\alpha_j/2)$ とし, 対応する単位円上の点を Q_j とする. (1) および半角公式から各 Q_j の座標は有理数であり, (2) から任意の二点間距離も有理数である.

有限個の座標と距離の分母の公倍数を N とし

$$A_j = NQ_j$$

とおく。すると各 A_j は格子点で、任意の二点間距離は整数である。また Q_j は同一円周上の相異なる点であり、一直線と円の交点は高々 2 個だから、どの 3 点も一直線上にない。相似拡大でこの性質は保たれる。

従って $A_1, \dots, A_n$ は (C1)、(C2)、(C3) をすべて満たす。

▶ 解法 2

【方針】

半角変数 u, v から弦長を有理式として直接導く。相異なる有理数 $u_j \in (0, 1)$ を選べば、対応点の座標と全ての相互距離が有理数になる。座標と距離の分母の公倍数で拡大し、円と直線の交点数から非共線性を保証する。

【解答】

(1) 直線 $PQ(t)$ は $y = t(x + 1)$ である。単位円へ代入して既知の交点 P を除けば

$$Q(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right).$$

座標差を整理すると

$$Q(s)Q(t) = \frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}.$$

(2) $s = \tan \alpha$, $t = \tan \beta$ であり、 $Q(s), Q(t)$ の単位円上の偏角はそれぞれ $2\alpha, 2\beta$ である。従って弦長は

$$Q(s)Q(t) = 2 \sin(\beta - \alpha).$$

半角公式から

$$\sin \alpha = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

であり、 β, v についても同様である。従って

$$Q(s)Q(t) = \frac{4(v-u)(1+uv)}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

$0 < s < t$ では $0 < u < v$ なので右辺は正であり、 u, v が有理数なら弦長も有理数である。

(3) 相異なる有理数

$$0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1$$

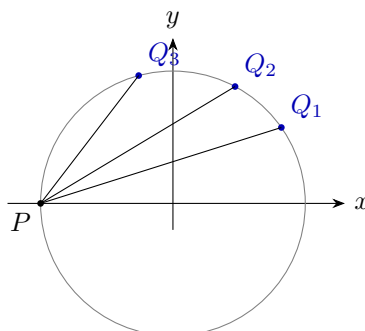
を選ぶ。例えば $u_j = j/(n+1)$ でよい。 $u_j = \tan(\alpha_j/2)$ 、 $t_j = \tan \alpha_j$ として $Q_j = Q(t_j)$ を取る。

$t_j = 2u_j/(1-u_j^2)$ は有理数なので、(1) から Q_j の両座標は有理数である。また上の公式から $Q_i Q_j$ も有理数である。有限個の全座標と全距離の分母の公倍数を N とし

$$A_j = NQ_j$$

と置けば、全ての A_j は格子点で、任意の 2 点間距離は整数である。

Q_j は同一円周上の相異なる点である。一直線と円の共有点は高々 2 個なので、異なる 3 点が一直線上に並ぶことはない。この性質は相似拡大で保たれる。従って (C1)–(C3) を全て満たす。



【総評】 有理座標だけでは 2 点間距離の平方根が有理とは限らないため、さらに半角を有理数にする工夫が必要である。弦長を u, v の有理式へ直すことで条件 (C3) が保証される。最後の一斉拡大では、座標だけでなく全ての相互距離の分母も公倍数へ含める。非共線性は円と直線の共有点が高々 2 個であることから従う。

【第 3 問】

座標平面上にある 2 つの四角形 $ABCD$ と $A'B'C'D'$ が相似であるとは、対応する 4 つの頂点における内角がそれぞれ等しく、かつ対応する辺の長さの比がすべて等しいこととする。このとき

$$\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$$

と書く。ただし、四角形 $ABCD$ と書くときには、4 つの頂点 A, B, C, D は図のようにつねに時計と反対回りに並んでいるものとし、また四角形は周および内部を含めて考えるものとする。

四角形 $A_0B_0C_0D_0$ が与えられたとき、この四角形から出発して、任意の整数 n に対して四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を以下のように帰納的に定める。

(I) $n = 0$ のときは、与えられた四角形 $A_0B_0C_0D_0$ とする。

(II) $n > 0$ のときは、四角形 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ まで定まったとして、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を

$$A_n = D_{n-1}, \quad B_n = C_{n-1} \quad \text{かつ} \quad \square A_nB_nC_nD_n \sim \square A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$$

となる四角形として定める。

(III) $n < 0$ のときは、 $0, -1, \dots$ と負の向きに進んで、四角形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ まで定まったとして、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を

$$D_n = A_{n+1}, \quad C_n = B_{n+1} \quad \text{かつ} \quad \square A_nB_nC_nD_n \sim \square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$$

となる四角形として定める。

こうして定まった四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を K_n と書くことにする。

さて、座標平面上の 3 点

$$A_0(2, 1), \quad B_0(8, 4), \quad P(4, 12)$$

を考える。原点を O とし、線分 OP 上に原点以外の 1 点 C_0 をとる。点 A_0 から線分 B_0C_0 に平行にひいた直線と、線分 OP との交点を D_0 とする。このようにして定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して、上記のようにして得られる四角形の系列

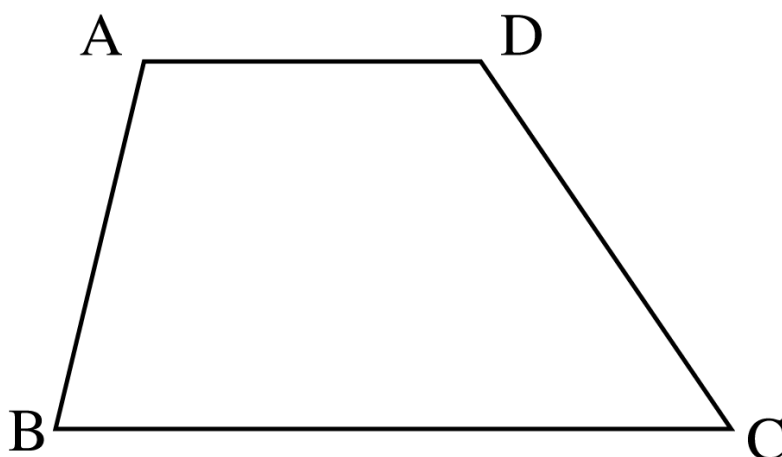
$$\dots, \quad K_{-2}, \quad K_{-1}, \quad K_0, \quad K_1, \quad K_2, \quad \dots$$

について考える。

(1) $\angle B_0OP$ を求めよ。

(2) 線分 OP 上のある点 C_0 をえらび、それにより定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して、四角形の系列 $\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$ を作ったところ、ある 0 でない整数 n が存在して、 $K_n = K_0$ となったという。このとき、点 C_0 の座標を求めよ。また、 $K_n = K_0$ となる整数 n の値をすべて求めよ。

(3) 線分 OP 上のある点 C_0 をえらび、それにより定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して、四角形の系列 $\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$ を作ったところ、これら四角形が座標平面から原点を除いた部分を、辺と頂点以外には互いに重なることなく、すき間なくおったという。このような性質をもつ点 C_0 をすべて求め、それらの座標を記せ。またそれらの場合のおのおのについて、点 $(100, 50)$ が K_n に含まれるような整数 n の値をすべて求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

点を複素数で表す。 $B_0 = 4A_0$ 、 $D_0 = C_0/4$ を示すと、次の四角形への変換は複素数 $\lambda = D_0/A_0$ を掛ける相似になる。偏角は $\pi/4$ 、倍率を ρ とし、回転周期と 8 段ごとの倍率から周期・敷き詰め条件を求める。

【解答】

点を同じ文字の複素数で表す。

$$A_0 = 2 + i, \quad B_0 = 8 + 4i = 4A_0, \quad P = 4 + 12i.$$

(1)

$$\cos \angle B_0OP = \frac{(8, 4) \cdot (4, 12)}{\sqrt{80}\sqrt{160}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

従って

$$\angle B_0OP = \frac{\pi}{4}.$$

(2) C_0 は線分 OP 上にあるから

$$C_0 = r(1 + 3i) \quad (0 < r \leq 4)$$

と書ける。 $A_0D_0 \parallel B_0C_0$ の条件を座標で解くと

$$D_0 = \frac{1}{4}C_0.$$

また $B_0 = 4A_0$ である。

ここで

$$\lambda = \frac{D_0}{A_0} = \frac{C_0}{B_0}$$

とおく。偏角と絶対値は

$$\arg \lambda = \frac{\pi}{4}, \quad \rho = |\lambda| = \frac{r\sqrt{2}}{4}.$$

相似の向きと頂点の順序から、 K_0 を K_1 へ移す相似変換は

$$z \mapsto \lambda z$$

である。帰納的に、負の添字も含めて

$$K_n = \lambda^n K_0$$

となる。

ある $n \neq 0$ で $K_n = K_0$ となるには

$$\lambda^n = 1$$

が必要十分である。従って $\rho = 1$ 、すなわち $r = 2\sqrt{2}$ であり

$$C_0 = (2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}).$$

このとき $\lambda = e^{i\pi/4}$ だから

$$K_n = K_0 \iff n \equiv 0 \pmod{8}.$$

従って求める整数は

$$n = 8k \quad (k \text{ は整数})$$

である。

(3) $D_0 = \lambda A_0$ 、 $B_0 = 4A_0$ 、 $C_0 = 4D_0$ だから

$$K_0 = \{sA_0 + tD_0 : s, t \geq 0, 1 \leq s + t \leq 4\}.$$

各 K_n はこれを角 $\pi/4$ だけ順次回転し、倍率 ρ で拡大縮小したものである。添字を 8 増すと同じ方向の扇形へ戻り、倍率は ρ^8 になる。同じ方向の層が重なりも隙間もなく半径方向を覆うための必要十分条件は

$$\rho^8 = 4 \quad \text{または} \quad \rho^8 = \frac{1}{4}.$$

従って

$$\rho = 2^{1/4} \quad \text{または} \quad \rho = 2^{-1/4}.$$

$r = 2\sqrt{2}\rho$ より、求める点は

$$C_0 = (2^{7/4}, 3 \cdot 2^{7/4})$$

または

$$C_0 = (2^{5/4}, 3 \cdot 2^{5/4})$$

である。8 つの剰余類が角度方向をちょうど一周し、同じ剰余類の層の倍率が 4 になるので、これらは十分条件も満たす。最後に $X = (100, 50)$ を考える。

$$100 + 50i = 50(2 + i) = 50A_0.$$

従って X が K_n に入る可能性があるのは、 X が K_n の始辺または終辺上に来る

$$n \equiv 0, 7 \pmod{8}$$

の場合だけである。

$\rho = 2^{1/4}$ の場合、 $n = 8k$ では

$$1 \leq 50\rho^{-8k} \leq 4$$

より $k = 2$ 、従って $n = 16$ である。 $n = 8k + 7$ では

$$1 \leq 50\rho^{-(8k+8)} \leq 4$$

より $k = 1$ 、従って $n = 15$ である。よって

$$n = 15, 16.$$

$\rho = 2^{-1/4}$ の場合も同様に、前者から $n = -16$ 、後者から $n = -17$ を得る。よって

$$n = -17, -16.$$

▶ 解法 2

【方針】

複素数を使わず、回転行列 R と倍率 ρ の相似変換 $T = \rho R$ で系列を記述する。 K_0 を 2 本の半直線と相似比 4 の 2 辺に挟まれた層として捉え、8 方向の扇形と同方向の半径層を別々に判定する。

【解答】

$\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (8, 4) = 4\vec{a}$ 、 $\vec{p} = (4, 12)$ とする。 $C_0 = r(1, 3)$ ($0 < r \leq 4$) と置き、平行条件を $\vec{a}, (1, 3)$ の 2 成分で比較すると

$$D_0 = \frac{1}{4}C_0.$$

従って $B_0 = 4A_0$ 、 $C_0 = 4D_0$ である。

(1)

$$\cos \angle B_0OP = \frac{(8, 4) \cdot (4, 12)}{\sqrt{80}\sqrt{160}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$$\angle B_0OP = \frac{\pi}{4}.$$

(2) A_0 を D_0 へ、 B_0 を C_0 へ移す向きを保つ相似変換を T とする。回転角は $\pi/4$ 、倍率は

$$\rho = \frac{OD_0}{OA_0} = \frac{r\sqrt{2}}{4}$$

であり、 $T = \rho R_{\pi/4}$ と書ける。頂点の順序から帰納的に

$$K_n = T^n K_0$$

である。

$K_n = K_0$ となる非零整数 n があるなら、面積比較から $\rho^{2n} = 1$ 、従って $\rho = 1$ である。また K_0 の 2 本の境界半直線のなす角は $\pi/4$ なので、回転後に同じ集合となるには $n\pi/4$ が 2π の整数倍でなければならない。よって

$$r = 2\sqrt{2}, \quad C_0 = (2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}),$$

$$K_n = K_0 \iff n = 8k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(3) K_0 は、角 $\pi/4$ の 2 本の半直線と、互いに 4 倍の相似な 2 線分 A_0D_0 、 B_0C_0 に挟まれた層である。 K_{n+1} はこれを角 $\pi/4$ 回して ρ 倍したもので、隣り合う層は共通辺だけで接する。

8 段進むと向きが元に戻り

$$K_{n+8} = \rho^8 K_n.$$

同じ方向の層が正の全半径を重なりなく埋めるには、外側境界が内側境界の 4 倍であることから

$$\rho^8 = 4 \quad \text{または} \quad \rho^8 = \frac{1}{4}$$

が必要十分である。従って

$$\rho = 2^{1/4} \quad \text{または} \quad \rho = 2^{-1/4}.$$

$r = 2\sqrt{2}\rho$ を戻すと

$$C_0 = (2^{7/4}, 3 \cdot 2^{7/4})$$

または

$$C_0 = (2^{5/4}, 3 \cdot 2^{5/4})$$

である。

点 $X = (100, 50) = 50A_0$ は A_0 の半直線上にある。従って $X \in K_n$ の可能性があるのは

$$n \equiv 0, 7 \pmod{8}$$

だけである。

$\rho^8 = 4$ の場合、 $n = 8k$ では $4^k \leq 50 \leq 4^{k+1}$ より $k = 2$ 、 $n = 16$ である。 $n = 8k + 7$ では $4^{k+1} \leq 50 \leq 4^{k+2}$ より $k = 1$ 、 $n = 15$ である。

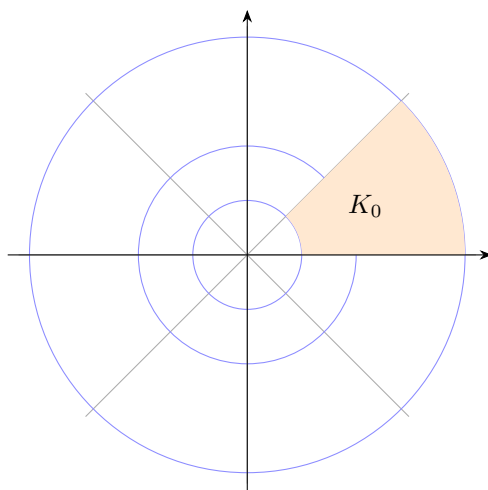
$\rho^8 = 1/4$ の場合も同じ不等式を逆向きの層番号で解き

$$n = -17, -16$$

を得る。従って答えは

C_0	X を含む K_n
$(2^{7/4}, 3 \cdot 2^{7/4})$	$n = 15, 16$
$(2^{5/4}, 3 \cdot 2^{5/4})$	$n = -17, -16$

である。



【総評】 相似系列を 1 回ごとの回転 $\pi/4$ と倍率 ρ に分解することが全体の核心である。8 段で方向が戻り、元の台形層の外側が内側の 4 倍なので、同方向の層が埋まる条件は $\rho^8 = 4$ または $1/4$ となる。点 $(100, 50) = 50A_0$ は境界半直線上にあるため、隣り合う 2 つの剰余類をどちらも調べる必要がある。原図の頂点順序は反時計回りであり、向きを反転する相似は採用しない。