

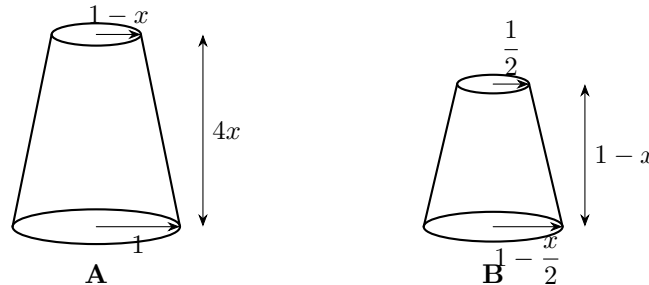
東京大学 2000 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

底面の半径 1, 上面の半径 $1-x$, 高さ $4x$ の直円すい台 A と, 底面の半径 $1-\frac{x}{2}$, 上面の半径 $\frac{1}{2}$, 高さ $1-x$ の直円すい台 B がある。ただし, $0 \leq x \leq 1$ である。 A と B の体積の和を $V(x)$ とするとき, $V(x)$ の最大値を求めよ。



▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

直円すい台の体積公式 $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ を 2 つの立体に適用する。半径と高さが x によって変わるので、まず A と B の体積を別々に展開し、和を 3 次関数に整理する。最大値は閉区間 $0 \leq x \leq 1$ 上で求めるため、導関数の符号変化だけでなく、端点 $x = 0, 1$ と区間内の停留点の値を必ず比較する。

【解答】

直円すい台の体積は、下底の半径を R 、上底の半径を r 、高さを h とすると $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ である。

直円すい台 A については、 $R = 1$, $r = 1-x$, $h = 4x$ だから $V_A = \frac{4\pi x}{3}\{1 + (1-x) + (1-x)^2\}$ である。括弧内を整理すると $1 + (1-x) + (1-x)^2 = 3 - 3x + x^2$ なので $V_A = \frac{\pi}{3}(12x - 12x^2 + 4x^3)$ である。

直円すい台 B については、 $R = 1 - \frac{x}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $h = 1-x$ だから

$$V_B = \frac{\pi(1-x)}{3} \left\{ \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \right\}$$

である。括弧内は

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{7 - 5x + x^2}{4}$$

であるから $V_B = \frac{\pi}{12}(1-x)(7 - 5x + x^2)$ である。

したがって $V(x) = V_A + V_B = \frac{\pi}{12}(15x^3 - 42x^2 + 36x + 7)$ となる。導関数は $V'(x) = \frac{\pi}{12}(45x^2 - 84x + 36) = \frac{\pi}{4}(15x^2 - 28x + 12)$ である。 $15x^2 - 28x + 12 = 0$ を解くと $x = \frac{2}{3}, \frac{6}{5}$ であり、区間 $0 \leq x \leq 1$ に入る停留点は $x = 2/3$ だけである。

端点も含めて値を比べる。

$$\frac{12}{\pi}V(0) = 7, \quad \frac{12}{\pi}V(1) = 16, \quad \frac{12}{\pi}V\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{151}{9}$$

である。ここで $151/9 > 16$ なので、最大値は $x = 2/3$ のとき $V_{\max} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{151}{9} = \frac{151\pi}{108}$ である。

▶ 解法 2 (最大値との差を因数分解する)

【方針】

2 つの円すい台の体積を整理した後、導関数の増減表を使わず、候補値 $x = 2/3$ における体積との差を因数分解する。閉区間全体で差が非負になることを直接示せば、最大値と等号条件が同時に確定する。

【解答】

直円すい台の体積公式

$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

を用いる。A、B の体積はそれぞれ

$$V_A = \frac{4\pi x}{3}\{1 + (1-x) + (1-x)^2\},$$

$$V_B = \frac{\pi(1-x)}{3}\left\{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\right\}.$$

したがって

$$V(x) = \frac{\pi}{12}(15x^3 - 42x^2 + 36x + 7).$$

ここで $x = 2/3$ における値との差を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{12}{\pi}\left\{V\left(\frac{2}{3}\right) - V(x)\right\} &= \frac{151}{9} - (15x^3 - 42x^2 + 36x + 7) \\ &= \frac{(3x-2)^2(22-15x)}{9}. \end{aligned}$$

区間 $0 \leq x \leq 1$ では $22 - 15x > 0$ なので、右辺は常に 0 以上である。等号は $3x - 2 = 0$ 、すなわち $x = 2/3$ のときに限る。よって

$$\max_{0 \leq x \leq 1} V(x) = V\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{151\pi}{108}.$$

【総評】 難度 5、計算量 6。円すい台の 2 つの半径と高さを取り違えず、体積を一つの三次式へ整理できるかが中心。閉区間の最大値なので端点確認が必要であり、第 2 解法では最大値との差の因数分解によって全域での最大性を直接保証した。原典の円すい台 A・B の図も寸法入りで復元した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 2 問】

xy 平面内の領域

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

において

$$1 - ax - by - axy$$

の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 (a, b) の範囲を図示せよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

与式 $1 - ax - by - axy$ は x を固定すれば y の一次式、 y を固定すれば x の一次式である。したがって正方形領域上の最小値は頂点で実現する。4 頂点での値をすべて正にする条件を書き、 (a, b) 平面上の 3 本の直線で囲まれる開三角形として整理する。最後に境界を含まない理由を、最小値が「正」であることから確認する。

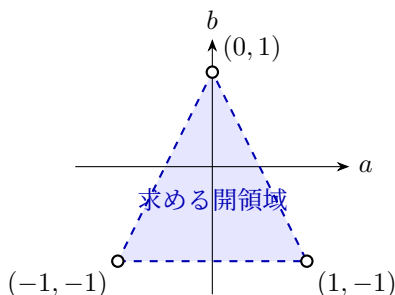
【解答】

$F(x, y) = 1 - ax - by - axy$ とおく。 y を固定すると $F(x, y)$ は x の一次式であるから、 $-1 \leq x \leq 1$ における最小値は $x = -1$ または $x = 1$ でとる。さらに x を固定すると $F(x, y)$ は y の一次式であるから、正方形 $-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$ 上の最小値は 4 つの頂点のいずれかでとる。

各頂点での値は $F(1, 1) = 1 - 2a - b$, $F(1, -1) = 1 + b$, $F(-1, 1) = 1 + 2a - b$, $F(-1, -1) = 1 + b$ である。したがって、最小値が正となるための必要十分条件は $1 - 2a - b > 0$, $1 + 2a - b > 0$, $1 + b > 0$ である。

これを (a, b) の条件として書き直すと $b < 1 - 2a$, $b < 1 + 2a$, $b > -1$ である。上 2 つは $b < 1 - 2|a|$ とまとめられる。さらに $-1 < b < 1 - 2|a|$ が成り立つには $1 - 2|a| > -1$ 、すなわち $|a| < 1$ が必要である。

よって求める範囲は $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1 - 2|a|$ である。図形としては、3 直線 $b = 1 - 2a$, $b = 1 + 2a$, $b = -1$ で囲まれる三角形の内部であり、頂点は $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$ である。ただし、最小値が 0 ではなく正でなければならないので、境界はすべて含まない。



▶ 解法 2 (絶対値で一変数化する)

【方針】

y について先に最小化し、 $1 - ax - |b + ax|$ を得る。これは x の凹関数なので区間の最小値は端点でとる。2 つの絶対値不等式を一次不等式へ戻して領域を求める。

【解答】

与式を

$$F(x, y) = 1 - ax - y(b + ax)$$

と書く。 x を固定したとき、 $-1 \leq y \leq 1$ における最小値は

$$\min_y F(x, y) = 1 - ax - |b + ax|$$

である。この右辺は、一次関数から絶対値関数を引いたものなので x の凹関数である。したがって $[-1, 1]$ 上の最小値は端点 $x = -1, 1$ のいずれかでとる。

ゆえに求める必要十分条件は

$$1 - a - |a + b| > 0, \quad 1 + a - |b - a| > 0.$$

第 1 式は

$$|a + b| < 1 - a$$

であり、これは

$$a < 1, \quad -1 < b < 1 - 2a$$

と同値である。同様に第 2 式は

$$a > -1, \quad -1 < b < 1 + 2a$$

と同値である。両方を合わせると

$$-1 < a < 1, \quad -1 < b < \min(1 - 2a, 1 + 2a).$$

したがって

$$-1 < a < 1, \quad -1 < b < 1 - 2|a|.$$

これは頂点 $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$ をもつ三角形の内部である。不等号がすべて狭義なので、3 辺と 3 頂点は含まれない。

【総評】 難度 5、計算量 4。双一次式の最小値が正方形の頂点で決まる理由を明示することが採点上重要。4 頂点法と、絶対値を用いた凹関数法の 2 方向で必要十分性を確認した。答えは三角形の内部だけで、最小値が正という条件から境界 3 辺を含まない。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 3 問】

正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は、同じ頂点にとどまることなく、1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。 X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で表す。

$$P_1(0) = \frac{1}{4}, \quad P_2(0) = \frac{1}{2}, \quad P_3(0) = \frac{1}{8}, \quad P_4(0) = \frac{1}{8}$$

とすると、 $P_1(n)$ と $P_2(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

次に A_i にいる確率は、直前に A_i 以外の 3 頂点のどれかにいて、そこから A_i に移る確率の和である。各頂点から他の 3 頂点へ等確率で移るので、 $P_i(n+1) = (1 - P_i(n))/3$ という 1 変数漸化式が各 i について独立に成り立つ。平衡値 $1/4$ との差を取ると公比 $-1/3$ の等比数列になるため、初期値 $P_1(0), P_2(0)$ を代入して求める。

【解答】

時刻 $n+1$ に A_i にいるためには、時刻 n に A_i 以外の頂点にいて、そこから A_i へ移ればよい。どの頂点からでも他の 3 頂点へ同じ確率 $1/3$ で移るから $P_i(n+1) = \frac{1}{3}\{1 - P_i(n)\}$ である。これを

$$P_i(n+1) - \frac{1}{4} = \frac{1 - P_i(n)}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(P_i(n) - \frac{1}{4} \right)$$

と変形する。

したがって $P_i(n) - 1/4$ は公比 $-1/3$ の等比数列であり、 $P_i(n) - \frac{1}{4} = \left(P_i(0) - \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{1}{3} \right)^n$ が成り立つ。

まず $P_1(0) = 1/4$ だから $P_1(n) - \frac{1}{4} = 0$ であり、すべての n について $P_1(n) = \frac{1}{4}$ である。

次に $P_2(0) = 1/2$ だから

$$P_2(n) - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$$

である。したがって $P_2(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$ である。

▶ 解法 2 (遷移行列の固有方向)

【方針】

確率ベクトルを、全成分が $1/4$ の平衡部分と、成分和が 0 のずれに分ける。遷移行列は平衡部分を保ち、ずれを毎秒 $-1/3$ 倍することを直接確かめる。

【解答】

確率ベクトルを

$$\mathbf{P}(n) = \begin{pmatrix} P_1(n) \\ P_2(n) \\ P_3(n) \\ P_4(n) \end{pmatrix}$$

とする。1 秒の遷移を表す行列は

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

全成分が 1 のベクトルを $\mathbf{e}$ とすると $T\mathbf{e} = \mathbf{e}$ である。一方、成分和が 0 のベクトル $\mathbf{u}$ について、第 i 成分は

$$(T\mathbf{u})_i = \frac{1}{3} \sum_{j \neq i} u_j = -\frac{1}{3} u_i$$

となる。したがって平衡ベクトル $\mathbf{e}/4$ からのずれは毎秒 $-1/3$ 倍され、

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{4} \mathbf{e} + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \left\{ \mathbf{P}(0) - \frac{1}{4} \mathbf{e} \right\}.$$

第 1 成分では初期のずれが 0 なので

$$P_1(n) = \frac{1}{4}.$$

第 2 成分では初期のずれが $1/2 - 1/4 = 1/4$ だから

$$P_2(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n.$$

いずれも $n = 0$ を含むすべての非負整数 n で成り立つ。

【総評】 難度 4、計算量 3。各頂点の確率を 4 変数のまま追わず、平衡値 $1/4$ からのずれを見ると一行の等比漸化式になる。第 2 解法では遷移行列の平衡方向と成分和 0 の方向を分け、符号が毎回反転する理由まで説明した。初期時刻 $n=0$ も公式に含まれる。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 4 問】

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を考える。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を通る直線を l , 原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする。ただし、複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき、
「 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は、 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることである。」
を示せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

円 $|z - 1/2| = 1/2$ の条件を、 $z \neq 0$ に対して $1/z$ の実部が 1 である条件に変換する。十分性では $1/\alpha = 1 + is$, $1/\beta = 1 + it$ とおき、 $\alpha\beta$ が直線 PQ 上にあることと、 O からその点へ向かう方向が直線 PQ に垂直であることを、複素数の比が実数・純虚数になる条件で示す。必要性ではこの 2 条件を逆に使って、 $1/\alpha$, $1/\beta$ の実部が 1 であることを導く。

【解答】

まず円の条件を書き換える。 $z \neq 0$ について $\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ は、両辺を 2 乗して $\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\bar{z} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$ すなわち $z\bar{z} = \frac{z + \bar{z}}{2}$ と同値である。さらに $z\bar{z}$ で割ると $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 2$ であり、これは $1/z$ の実部が 1 であることと同値である。

十分性を示す。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ がこの円周上にあるとする。すると実数 s, t を用いて $\frac{1}{\alpha} = 1 + is$, $\frac{1}{\beta} = 1 + it$ と書ける。 $\alpha \neq \beta$ より $s \neq t$ である。このとき

$$\beta - \alpha = \frac{1}{1 + it} - \frac{1}{1 + is} = \frac{i(s - t)}{(1 + is)(1 + it)} = i(s - t)\alpha\beta$$

である。

まず $\alpha\beta$ が直線 PQ 上にあることを示す。直線上にあるためには $\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数であればよい。実際、上の式を用いると

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha(\beta - 1)}{i(s - t)\alpha\beta} = \frac{\beta - 1}{i(s - t)\beta}$$

であり、 $1/\beta = 1 + it$ から $(\beta - 1)/\beta = 1 - 1/\beta = -it$ なので

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{-it}{i(s - t)} = -\frac{t}{s - t}$$

となる。これは実数である。

次に、原点から $\alpha\beta$ へ向かう方向が直線 PQ に垂直であることを示す。直線 PQ の方向は $\beta - \alpha$ であるから、

$$\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta}{i(s - t)\alpha\beta} = \frac{1}{i(s - t)}$$

は純虚数である。したがって O と $\alpha\beta$ を結ぶ直線は PQ に垂直である。以上より、原点から直線 l に下ろした垂線の足は $w = \alpha\beta$ である。

必要性を示す。逆に $w = \alpha\beta$ であるとする。垂線の足は直線 l 上にあるから、 $\alpha\beta$ は直線 PQ 上にある。よって $\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha}$ は実数である。また O から $\alpha\beta$ への方向は l に垂直なので $\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}$ は純虚数である。

したがって、前者を後者で割った $\frac{\alpha\beta - \alpha}{\alpha\beta} = 1 - \frac{1}{\beta}$ は純虚数である。よって $1/\beta$ の実部は 1 であり、上で示した円の条件から $Q(\beta)$ は中心 $1/2$ 、半径 $1/2$ の円周上にある。

同様に、 $\alpha\beta$ が直線 PQ 上にあることから $\frac{\alpha\beta - \beta}{\alpha - \beta}$ は実数であり、垂直条件から $\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}$ は純虚数である。両者の商 $\frac{\alpha\beta - \beta}{\alpha\beta} = 1 - \frac{1}{\alpha}$ は純虚数なので、 $1/\alpha$ の実部も 1 である。したがって $P(\alpha)$ も同じ円周上にある。

以上により、 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は、 $P(\alpha), Q(\beta)$ が中心 $1/2$ 、半径 $1/2$ の円周上にあることである。

▶ 解法 2 (円周の角度表示を使う)

【方針】

中心 $1/2$ 、半径 $1/2$ の円周上の点を $(1 + e^{i\theta})/2$ と表す。弦の方向と積 $\alpha\beta$ の方向を半角公式で比較し、十分性を幾何的に示す。必要性は垂足の直線上条件と直交条件を逆用する。

【解答】

まず十分性を示す。円周上の原点でない点は、適当な実数 u, v を用いて

$$\alpha = \frac{1 + e^{iu}}{2} = e^{iu/2} \cos \frac{u}{2}, \quad \beta = \frac{1 + e^{iv}}{2} = e^{iv/2} \cos \frac{v}{2}$$

と表せる。 $\alpha \neq \beta$ だから $\sin((v - u)/2) \neq 0$ であり、

$$\beta - \alpha = \frac{e^{iv} - e^{iu}}{2} = ie^{i(u+v)/2} \sin \frac{v - u}{2}.$$

一方

$$\alpha\beta = e^{i(u+v)/2} \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}.$$

したがって $(\beta - \alpha)/(\alpha\beta)$ は純虚数であり、原点と $\alpha\beta$ を結ぶ直線は弦 PQ に垂直である。

さらに

$$\alpha\beta - \alpha = \alpha(\beta - 1) = ie^{i(u+v)/2} \cos \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}$$

なので

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\cos(u/2) \sin(v/2)}{\sin((v - u)/2)}$$

は実数である。よって $\alpha\beta$ は直線 PQ 上にある。以上より垂線の足は $w = \alpha\beta$ である。

次に必要性を示す。 $w = \alpha\beta$ が垂足なら

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} \in \mathbb{R}, \quad \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \in i\mathbb{R}.$$

第 1 の量を第 2 の量で割ると

$$1 - \frac{1}{\beta} \in i\mathbb{R}.$$

したがって $\operatorname{Re}(1/\beta) = 1$ である。同様に、 $(\alpha\beta - \beta)/(\alpha - \beta)$ を $\alpha\beta/(\alpha - \beta)$ で割れば $\operatorname{Re}(1/\alpha) = 1$ を得る。

原点でない複素数 z について

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = 1 \iff \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

であるから、 P, Q はともに指定された円周上にある。これで必要十分性が示された。

【総評】 難度 8、計算量 6。垂足であることは「直線 PQ 上にある」と「原点からの方向が PQ に垂直」の 2 条件に分ける。複素数の商が実数・純虚数となる条件を混同しないことが核心。必要性和十分性を別々に完結させ、円周条件を逆数の実部と角度表示の両方から検算した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。