

入 学 試 験 問 題

数 学



東京大学 2000 年度理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

k を正整数とし, x を変数とする k 次多項式 $P_k(x)$ について次の条件

$$(C) \quad \begin{cases} P_k(x) - P_k(x-1) = x^{k-1} \\ P_k(0) = 0 \end{cases}$$

を考える. ただし, $x^0 = 1$ と定める. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $k = 1, 2$ に対し, $P_k(x)$ を求めよ.
- (2) すべての $k \geq 3$ に対し, 条件 (C) を満たす $P_k(x)$ が存在し, しかもただ一つであることを示せ.
- (3) 正整数 k に対し, k 次の多項式 $Q_k(x)$ を次の条件が成立するように定める.

$$\begin{cases} Q_k(0) = Q_k(1) = \cdots = Q_k(k-1) = 0 \\ Q_k(k) = 1 \end{cases}$$

このとき, k 個の整数 $c_1, c_2, \dots, c_k$ がそれぞれただ一つ存在して

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^k c_j Q_j(x)$$

と表されることを示せ.

第 2 問

正整数 l を与える. 各正整数 n に対して, 関数

$$y = x^l \sin nx, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

のグラフと x 軸で囲まれる図形を C_n とする.

(1) C_n を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_n とするとき, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$$

を求めよ.

(2) C_n を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を W_n とするとき, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$$

を求めよ.

第 3 問

背番号 1 から 5 までを順に付けた 5 人が，何も置かれていないテーブルに向かっている．最初 5 人は各自 3 枚のコインを持っている．それを背番号順に必ず 1 枚または 2 枚テーブルの上に置いてゆく．ただし，手もとに 2 枚以上のコインがあるときに 1 枚だけコインを置く確率を p とし， p は人によらず一定とする．

背番号 5 の人が置き終わったところ（一巡目が終わったところ）で，再び背番号 1 の人から順に手もとに残ったコインをテーブルに置いてゆく．

- (1) 一巡目が終わったとき，テーブルの上に 7 枚のコインが置かれている確率 Q を求めよ．また，その Q を最大にする p の値と，そのときの Q の値を求めよ．
- (2) 一巡目を終わるとき，背番号 5 の人が，テーブル上に 7 枚目のコインを置く確率 R を求めよ．また，その R を最大にする p の値を求めよ．
- (3) 二巡目が終わったときのテーブルの上のコインの数の期待値を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)