

# 入 学 試 験 問 題

## 数 学



東 京 大 学 2000 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

$AB = AC$ ,  $BC = 2$  の直角二等辺三角形  $ABC$  の各辺に接し, ひとつの軸が辺  $BC$  に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

## 第 2 問

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点  $P(\alpha)$ ,  $Q(\beta)$  を考える。 $P(\alpha)$ ,  $Q(\beta)$  を通る直線を  $l$ , 原点から  $l$  に引いた垂線と  $l$  の交点を  $R(w)$  とする。ただし, 複素数  $\gamma$  が表す点  $C$  を  $C(\gamma)$  とかく。このとき,

「 $w = \alpha\beta$  であるための必要十分条件は,  $P(\alpha)$ ,  $Q(\beta)$  が中心  $A\left(\frac{1}{2}\right)$ , 半径  $\frac{1}{2}$  の円周上にあることである。」

を示せ。

### 第 3 問

$a > 0$  とする。正の整数  $n$  に対して、区間  $0 \leq x \leq a$  を  $n$  等分する点の集合

$$\left\{ 0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a, a \right\}$$

の上で定義された関数  $f_n(x)$  があり、次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0) = c, \\ \frac{f_n((k+1)h) - f_n(kh)}{h} = \{1 - f_n(kh)\}f_n((k+1)h) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

ただし、 $h = \frac{a}{n}$ 、 $c > 0$  である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $p_k = \frac{1}{f_n(kh)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) において  $p_k$  を求めよ。
- (2)  $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$  とおく。 $g(a)$  を求めよ。
- (3)  $c = 2, 1, \frac{1}{4}$  それぞれの場合について、 $y = g(x)$  の  $x > 0$  でのグラフをかけ。

## 第 4 問

座標平面上を運動する 3 点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  があり, 時刻  $t$  における座標が次で与えられている。

$$P : (x, y) = (\cos t, \sin t)$$

$$Q : (x, y) = \left(1 - vt, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$R : (x, y) = (1 - vt, 1)$$

ただし,  $v$  は正の定数である。この運動において, 以下のそれぞれの場合に  $v$  のとりうる値の範囲を求めよ。

- (1) 点  $P$  と線分  $QR$  が時刻 0 から  $2\pi$  までの間ではぶつからない。
- (2) 点  $P$  と線分  $QR$  がただ一度だけぶつかる。

## 第 5 問

次の条件を満たす正の整数全体の集合を  $S$  とおく。

「各けたの数字はたがいに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない。」

ただし， $S$  の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は  $S$  に含まれるとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1)  $S$  の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。
- (2) 小さい方から数えて 2000 番目の  $S$  の要素を求めよ。

## 第 6 問

(1)  $a, b, c$  を正の実数とすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす実数  $x, y, z$  を  $a, b, c$  で表せ。

(2)  $a, b, c$  が  $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 2, 1 \leq c \leq 2$  の範囲を動くとき、(1) の  $x, y, z$  を座標とする点  $(x, y, z)$  が描く立体を  $K$  とする。立体  $K$  を平面  $y = t$  で切った切り口の面積を求めよ。

(3) この立体  $K$  の体積を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)