

東京大学 2000 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$AB = AC$, $BC = 2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し、ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

直角二等辺三角形を $B = (-1, 0)$, $C = (1, 0)$, $A = (0, 1)$ と置く。楕円の一つの軸が BC に平行なので、楕円の軸は座標軸に平行である。底辺 BC に接することから中心の高さは縦半径に等しい。さらに 2 本の斜辺に同時に接する条件を、軸平行楕円と直線の接線条件で書くと中心が対称軸上にあることが分かり、横半径 p と縦半径 q の関係 $p^2 = 1 - 2q$ が出る。あとは面積 πpq を最大化する。

【解答】

座標を $B = (-1, 0)$, $C = (1, 0)$, $A = (0, 1)$ とおく。このとき三角形の 3 辺は $y = 0$, $y = 1 - x$, $y = 1 + x$ である。

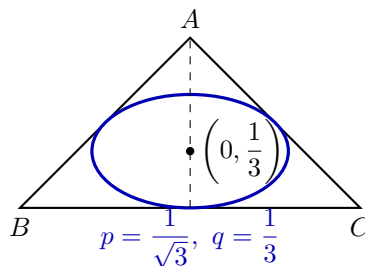
楕円の一つの軸が BC に平行であるから、楕円の軸は x 軸、 y 軸に平行である。中心を (u, q) 、横半径を p 、縦半径を q とおく。底辺 $y = 0$ に接するので、中心の y 座標は縦半径に等しい。したがって楕円は $\frac{(x-u)^2}{p^2} + \frac{(y-q)^2}{q^2} = 1$ と書ける。

直線 $x + y - 1 = 0$ がこの楕円に接する条件は $(u + q - 1)^2 = p^2 + q^2$ である。同様に、直線 $-x + y - 1 = 0$ が接する条件は $(-u + q - 1)^2 = p^2 + q^2$ である。両式の右辺は等しいから $(u + q - 1)^2 = (-u + q - 1)^2$ である。もし $q = 1$ なら楕円は三角形内に収まらないので、ここから $u = 0$ を得る。つまり中心は対称軸上にある。

よって楕円は $\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y-q)^2}{q^2} = 1$ であり、斜辺 $y = 1 - x$ への接線条件は $(q - 1)^2 = p^2 + q^2$ である。したがって $p^2 = (1 - q)^2 - q^2 = 1 - 2q$ となる。 $p^2 > 0$ より $0 < q < \frac{1}{2}$ である。

楕円の面積を S とすると $S = \pi pq = \pi q\sqrt{1-2q}$ である。 S を最大にするには $S^2 = \pi^2 q^2(1-2q)$ を最大にすればよい。 $F(q) = q^2(1-2q)$ とおくと $F'(q) = 2q(1-2q) - 2q^2 = 2q(1-3q)$ である。区間 $0 < q < 1/2$ において、 F は $q = 1/3$ まですべて増加し、その後減少する。よって最大は $q = \frac{1}{3}$ のときである。このとき $p^2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ なので、面積の

最大値は $\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ である。



▶ 解法 2 (相加相乗平均で最大化する)

【方針】

接線条件から横半径 p 、縦半径 q の関係 $p^2 = 1 - 2q$ を得る。面積の 2 乗を $q \cdot q \cdot (1 - 2q)$ と見て、和が 1 である 3 数に相加相乗平均を適用する。

【解答】

$B = (-1, 0), C = (1, 0), A = (0, 1)$ とおく。軸が座標軸に平行な楕円の中心を (u, q) 、横半径を p 、縦半径を q とする。底辺 $y = 0$ に接するので中心の高さは q である。

2 本の斜辺 $x + y = 1$ 、 $-x + y = 1$ への接線条件は

$$(u + q - 1)^2 = p^2 + q^2, \quad (-u + q - 1)^2 = p^2 + q^2.$$

両式を引くと $4u(q - 1) = 0$ である。 $q = 1$ では三角形内に収まらないから $u = 0$ であり、

$$(1 - q)^2 = p^2 + q^2, \quad p^2 = 1 - 2q.$$

したがって $0 < q < 1/2$ である。

面積を S とすると

$$\frac{S^2}{\pi^2} = p^2 q^2 = q^2(1 - 2q).$$

正の 3 数 $q, q, 1 - 2q$ の和は 1 なので、相加相乗平均より

$$q^2(1 - 2q) \leq \left(\frac{q + q + (1 - 2q)}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

等号は

$$q = q = 1 - 2q$$

すなわち $q = 1/3$ のときに成立する。このとき $p = 1/\sqrt{3}$ だから

$$S_{\max} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

【総評】 難度 7、計算量 5。軸平行だけで中心が対称軸上と決めつけず、2 本の斜辺への接線条件から導く必要がある。横半径と縦半径の制約を得た後は、微分と相加相乗平均の 2 通りで同じ等号条件を確認した。最大楕円を三角形内に描き、接点配置も視覚的に確認できる。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 2 問】

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を考える。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を通る直線を l , 原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする。ただし, 複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき,
「 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は, $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることである。」
を示せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

円 $|z - 1/2| = 1/2$ の条件を、 $z \neq 0$ に対して $1/z$ の実部が 1 である条件に変換する。十分性では $1/\alpha = 1 + is$, $1/\beta = 1 + it$ とおき、 $\alpha\beta$ が直線 PQ 上にあることと、 O からその点へ向かう方向が直線 PQ に垂直であることを、複素数の比が実数・純虚数になる条件で示す。必要性ではこの 2 条件を逆に使って、 $1/\alpha$, $1/\beta$ の実部が 1 であることを導く。

【解答】

まず円の条件を書き換える。 $z \neq 0$ について $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ は、両辺を 2 乗して $\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ すなわち $z\bar{z} = \frac{z + \bar{z}}{2}$ と同値である。さらに $z\bar{z}$ で割ると $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 2$ であり、これは $1/z$ の実部が 1 であることと同値である。

十分性を示す。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ がこの円周上にあるとする。すると実数 s, t を用いて $\frac{1}{\alpha} = 1 + is$, $\frac{1}{\beta} = 1 + it$ と書ける。 $\alpha \neq \beta$ より $s \neq t$ である。このとき

$$\beta - \alpha = \frac{1}{1 + it} - \frac{1}{1 + is} = \frac{i(s - t)}{(1 + is)(1 + it)} = i(s - t)\alpha\beta$$

である。

まず $\alpha\beta$ が直線 PQ 上にあることを示す。直線上にあるためには $\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数であればよい。実際、上の式を用いると

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha(\beta - 1)}{i(s - t)\alpha\beta} = \frac{\beta - 1}{i(s - t)\beta}$$

であり、 $1/\beta = 1 + it$ から $(\beta - 1)/\beta = 1 - 1/\beta = -it$ なので

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{-it}{i(s - t)} = -\frac{t}{s - t}$$

となる。これは実数である。

次に、原点から $\alpha\beta$ へ向かう方向が直線 PQ に垂直であることを示す。直線 PQ の方向は $\beta - \alpha$ であるから、

$$\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta}{i(s - t)\alpha\beta} = \frac{1}{i(s - t)}$$

は純虚数である。したがって O と $\alpha\beta$ を結ぶ直線は PQ に垂直である。以上より、原点から直線 l に下ろした垂線の足は $w = \alpha\beta$ である。

必要性を示す。逆に $w = \alpha\beta$ であるとする。垂線の足は直線 l 上にあるから、 $\alpha\beta$ は直線 PQ 上にある。よって $\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha}$ は実数である。また O から $\alpha\beta$ への方向は l に垂直なので $\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}$ は純虚数である。

したがって、前者を後者で割った $\frac{\alpha\beta - \alpha}{\alpha\beta} = 1 - \frac{1}{\beta}$ は純虚数である。よって $1/\beta$ の実部は 1 であり、上で示した円の条件から $Q(\beta)$ は中心 $1/2$ 、半径 $1/2$ の円周上にある。

同様に、 $\alpha\beta$ が直線 PQ 上にあることから $\frac{\alpha\beta - \beta}{\alpha - \beta}$ は実数であり、垂直条件から $\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}$ は純虚数である。両者の商 $\frac{\alpha\beta - \beta}{\alpha\beta} = 1 - \frac{1}{\alpha}$ は純虚数なので、 $1/\alpha$ の実部も 1 である。したがって $P(\alpha)$ も同じ円周上にある。

以上により、 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は、 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $1/2$ 、半径 $1/2$ の円周上にあることである。

▶ 解法 2 (円周の角度表示を使う)

【方針】

中心 $1/2$ 、半径 $1/2$ の円周上の点を $(1 + e^{i\theta})/2$ と表す。弦の方向と積 $\alpha\beta$ の方向を半角公式で比較し、十分性を幾何的に示す。必要性は垂足の直線上条件と直交条件を逆用する。

【解答】

まず十分性を示す。円周上の原点でない点は、適当な実数 u, v を用いて

$$\alpha = \frac{1 + e^{iu}}{2} = e^{iu/2} \cos \frac{u}{2}, \quad \beta = \frac{1 + e^{iv}}{2} = e^{iv/2} \cos \frac{v}{2}$$

と表せる。 $\alpha \neq \beta$ だから $\sin((v-u)/2) \neq 0$ であり、

$$\beta - \alpha = \frac{e^{iv} - e^{iu}}{2} = ie^{i(u+v)/2} \sin \frac{v-u}{2}.$$

一方

$$\alpha\beta = e^{i(u+v)/2} \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}.$$

したがって $(\beta - \alpha)/(\alpha\beta)$ は純虚数であり、原点と $\alpha\beta$ を結ぶ直線は弦 PQ に垂直である。

さらに

$$\alpha\beta - \alpha = \alpha(\beta - 1) = ie^{i(u+v)/2} \cos \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}$$

なので

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\cos(u/2) \sin(v/2)}{\sin((v-u)/2)}$$

は実数である。よって $\alpha\beta$ は直線 PQ 上にある。以上より垂線の足は $w = \alpha\beta$ である。

次に必要性を示す。 $w = \alpha\beta$ が垂足なら

$$\frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta - \alpha} \in \mathbb{R}, \quad \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \in i\mathbb{R}.$$

第 1 の量を第 2 の量で割ると

$$1 - \frac{1}{\beta} \in i\mathbb{R}.$$

したがって $\operatorname{Re}(1/\beta) = 1$ である。同様に、 $(\alpha\beta - \beta)/(\alpha - \beta)$ を $\alpha\beta/(\alpha - \beta)$ で割れば $\operatorname{Re}(1/\alpha) = 1$ を得る。

原点でない複素数 z について

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = 1 \iff \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

であるから、 P, Q はともに指定された円周上にある。これで必要十分性が示された。

【総評】 難度 8、計算量 6。垂足であることは「直線 PQ 上にある」と「原点からの方向が PQ に垂直」の 2 条件に分ける。複素数の商が実数・純虚数となる条件を混同しないことが核心。必要性和十分性を別々に完結させ、円周条件を逆数の実部と角度表示の両方から検算した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 3 問】

$a > 0$ とする。正の整数 n に対して、区間 $0 \leq x \leq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a, a\right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり、次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0) = c, \\ \frac{f_n((k+1)h) - f_n(kh)}{h} = \{1 - f_n(kh)\}f_n((k+1)h) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

ただし、 $h = \frac{a}{n}$ 、 $c > 0$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $p_k = \frac{1}{f_n(kh)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とおいて p_k を求めよ。
- (2) $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ とおく。 $g(a)$ を求めよ。
- (3) $c = 2, 1, \frac{1}{4}$ それぞれの場合について、 $y = g(x)$ の $x > 0$ でのグラフをかけ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

差分方程式は $f_n((k+1)h)$ と $f_n(kh)$ が積で現れるため、逆数 $p_k = 1/f_n(kh)$ を導入すると一次漸化式になる。具体的には $p_{k+1} - 1 = (1-h)(p_k - 1)$ で、等比数列として p_k を求める。 $k = n$ 、 $h = a/n$ として $(1-a/n)^n$ の極限を取り、最後は c の値ごとに初期値・単調性・漸近線 $y = 1$ を整理してグラフの形を決める。

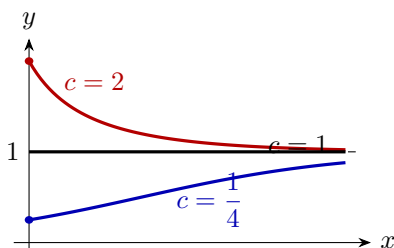
【解答】

(1) 記号を簡単にするため $f_k = f_n(kh)$ と書く。与えられた式は $\frac{f_{k+1} - f_k}{h} = (1 - f_k)f_{k+1}$ であるから $f_{k+1} - f_k = h(1 - f_k)f_{k+1}$ である。両辺を $f_k f_{k+1}$ で割ると $\frac{1}{f_k} - \frac{1}{f_{k+1}} = h \left(\frac{1}{f_k} - 1 \right)$ となる。 $p_k = 1/f_k$ とおくと $p_k - p_{k+1} = h(p_k - 1)$ であり、したがって $p_{k+1} = (1-h)p_k + h$ である。両辺から 1 を引けば $p_{k+1} - 1 = (1-h)(p_k - 1)$ となる。 $p_0 = 1/c$ だから $p_k - 1 = \left(\frac{1}{c} - 1 \right) (1-h)^k$ であり、 $p_k = 1 + \left(\frac{1}{c} - 1 \right) (1-h)^k$ である。

(2) a に対応する点は $k = n$ であり、 $h = a/n$ である。(1) より $f_n(a) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{c} - 1 \right) \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n}$ である。ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n = e^{-a}$ なので $g(a) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{c} - 1 \right) e^{-a}}$ である。分母分子に ce^a を掛けると $g(a) = \frac{ce^a}{ce^a + 1 - c}$ である。

(3) $x > 0$ に対して $g(x) = \frac{ce^x}{ce^x + 1 - c}$ である。また微分すると $g'(x) = \frac{ce^x(1-c)}{(ce^x + 1 - c)^2}$ である。 $c = 2$ のとき $g(x) = \frac{2e^x}{2e^x - 1}$ であり、 $g'(x) < 0$ だから単調減少である。 $x = 0$ まで延長すれば $g(0) = 2$ であり、 $x \rightarrow \infty$ で $g(x) \rightarrow 1$ となる。したがって $x > 0$ では 1 より大きい側から 1 に近づく曲線である。 $c = 1$ のとき $g(x) = 1$ であり、グラフは水平直線 $y = 1$ である。 $c = \frac{1}{4}$ のとき $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$ であり、 $g'(x) > 0$ だから単調増加である。 $x = 0$ まで延長すれば $g(0) = 1/4$ であり、 $x \rightarrow \infty$ で $g(x) \rightarrow 1$ となる。したがって $x > 0$ では 1 より小さい側から 1 に近づく曲線である。

以上を図示すれば、 $c = 2$ は上から $y = 1$ に近づく減少曲線、 $c = 1$ は $y = 1$ 、 $c = 1/4$ は下から $y = 1$ に近づく増加曲線である。



▶ 解法 2 (閉じた形を帰納的に検算する)

【方針】

差分方程式を f_{k+1} について解き、得られる分数変換を反復する。閉じた式を数学的帰納法で直接確認し、極限後は $g' = g(1 - g)$ を使って 3 本のグラフの増減と曲がり方まで決める。

【解答】

(1) $f_k = f_n(kh)$ と略記する。与式を f_{k+1} について解くと

$$f_{k+1} = \frac{f_k}{1 - h + hf_k}.$$

ここから

$$f_k = \frac{c}{c + (1 - c)(1 - h)^k}$$

と予想できる。 $k = 0$ では明らかに成り立つ。これを上の漸化式へ代入すると

$$f_{k+1} = \frac{c}{c + (1 - c)(1 - h)^{k+1}}$$

となるので、帰納法により成立する。したがって

$$p_k = \frac{1}{f_k} = 1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)(1 - h)^k.$$

(2) 極限に必要な十分大きい n では $0 < h = a/n < 1$ である。 $k = n$ として

$$f_n(a) = \frac{c}{c + (1 - c)(1 - a/n)^n}.$$

$(1 - a/n)^n \rightarrow e^{-a}$ より

$$g(a) = \frac{c}{c + (1 - c)e^{-a}} = \frac{ce^a}{ce^a + 1 - c}.$$

(3) $x > 0$ に対し

$$g'(x) = g(x)\{1 - g(x)\}.$$

$c = 2$ では $g(0) = 2$ 、 $g > 1$ なので単調減少し、上側から漸近線 $y = 1$ に近づく。 $c = 1$ では恒等的に $g(x) = 1$ である。 $c = 1/4$ では $g(0) = 1/4$ 、 $0 < g < 1$ なので単調増加し、下側から $y = 1$ に近づく。さらに

$$g''(x) = g(x)\{1 - g(x)\}\{1 - 2g(x)\}$$

より、 $c = 1/4$ の曲線は $g = 1/2$ 、すなわち $x = \log 3$ で変曲する。これらの情報から 3 本のグラフが一意に定まる。

【総評】 難度 6、計算量 5。非線形に見える差分方程式を逆数で一次化することが主眼。極限では $k=n$ 、 $h=a/n$ の代入を明記し、十分大きい n で式が正則であることも確認した。3 つのグラフは初期値、単調性、水平漸近線に加え、 $c=1/4$ では変曲点まで示している。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 4 問】

座標平面上を運動する 3 点 P, Q, R があり、時刻 t における座標が次で与えられている。

$$P : (x, y) = (\cos t, \sin t)$$

$$Q : (x, y) = \left(1 - vt, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$R : (x, y) = (1 - vt, 1)$$

ただし、 v は正の定数である。この運動において、以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

- (1) 点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。
- (2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

線分 QR は時刻 t において $x = 1 - vt$ 、 $\sqrt{3}/2 \leq y \leq 1$ の縦線分である。点 P がぶつかる条件は $\cos t = 1 - vt$ と $\sqrt{3}/2 \leq \sin t \leq 1$ の同時成立であり、後者から t は $\pi/3 \leq t \leq 2\pi/3$ に限られる。したがって $v = (1 - \cos t)/t$ のこの区間での値域を求め、さらに単調性により衝突回数を判断する。

【解答】

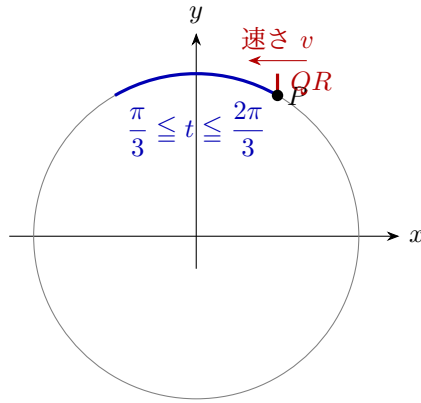
(1) 時刻 t において、線分 QR は $x = 1 - vt$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$ で表される縦の線分である。点 P は $(\cos t, \sin t)$ だから、 P が線分 QR 上にある条件は $\cos t = 1 - vt$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin t \leq 1$ である。 $0 \leq t \leq 2\pi$ において $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin t \leq 1$ となるのは $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ のときである。したがって衝突が起こるためには、この区間のある t について $v = \frac{1 - \cos t}{t}$ となればよい。 $\phi(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$ とおく。すると $\phi'(t) = \frac{t \sin t + \cos t - 1}{t^2}$ である。分子を $F(t) = t \sin t + \cos t - 1$ とおくと $F'(t) = t \cos t$ である。したがって F は $[\pi/3, \pi/2]$ で増加し、 $[\pi/2, 2\pi/3]$ で減少する。

端点では $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} > 0$ 、 $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{2} > 0$ であるから、この区間全体で $F(t) > 0$ である。よって $\phi(t)$ は $[\pi/3, 2\pi/3]$ で単調増加する。

したがって衝突が起こる v の範囲は $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq v \leq \phi\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ である。端点の値は $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 - 1/2}{\pi/3} = \frac{3}{2\pi}$ 、 $\phi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1 - (-1/2)}{2\pi/3} = \frac{9}{4\pi}$ である。よって、ぶつからないための条件はこの範囲の外側、すなわち $0 < v < \frac{3}{2\pi}$ または $v > \frac{9}{4\pi}$ である。

(2) 上で示したように、衝突は $v = \phi(t)$ 、 $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ と同値であり、 $\phi(t)$ はこの区間で単調増加である。したがって $\frac{3}{2\pi} \leq v \leq \frac{9}{4\pi}$ のとき、対応する時刻 t はただ 1 つ存在する。端点の場合も、 $t = \pi/3$ または $t = 2\pi/3$ で 1 回だけぶつかる。

よって、点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかるための v の範囲は $\frac{3}{2\pi} \leq v \leq \frac{9}{4\pi}$ である。



▶ 解法 2 (速度を時刻の関数として比較する)

【方針】

衝突可能な円弧を先に限定し、各時刻に衝突を起こす速度 $v = (1 - \cos t)/t$ を考える。そのグラフが対象区間で狭義増加することを端点を含めて示し、水平線との交点数を数える。

【解答】

(1) 線分 QR 上の点は

$$x = 1 - vt, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$$

を満たす。したがって衝突時刻は

$$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$$

に限られ、そのとき

$$v = \psi(t) := \frac{1 - \cos t}{t}.$$

微分すると

$$\psi'(t) = \frac{t \sin t + \cos t - 1}{t^2}.$$

分子を $H(t)$ とおけば $H'(t) = t \cos t$ である。ゆえに H は $[\pi/3, \pi/2]$ で増加し、 $[\pi/2, 2\pi/3]$ で減少する。両端では

$$H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} > 0, \quad H\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{2} > 0.$$

したがって全区間で $\psi'(t) > 0$ である。

衝突する速度の全範囲は

$$\psi\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq v \leq \psi\left(\frac{2\pi}{3}\right),$$

すなわち

$$\frac{3}{2\pi} \leq v \leq \frac{9}{4\pi}.$$

よって衝突しない範囲は

$$0 < v < \frac{3}{2\pi} \quad \text{または} \quad v > \frac{9}{4\pi}.$$

(2) ψ は連続かつ狭義増加なので、上の閉区間内の各 v に対し $v = \psi(t)$ を満たす時刻はただ 1 つである。端点速度でも対応時刻はそれぞれ $\pi/3, 2\pi/3$ の 1 回だけである。したがって

$$\frac{3}{2\pi} \leq v \leq \frac{9}{4\pi}.$$

【総評】 難度 7、計算量 5。衝突条件は x 座標の一致だけでなく、 P の y 座標が線分 QR の範囲内にあることも必要。その条件で時刻を閉区間に限定してから速度関数の値域と単調性を調べた。端点速度では線分の端点に 1 回衝突するため、第 (2) 問の範囲には両端を含む。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 5 問】

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字はたがいに異なり、どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない。」

ただし、 S の要素は 10 進法で表す。また、1 けたの正の整数は S に含まれるとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。
- (2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

和が 9 になる数字の組 $\{0, 9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ に分けると、条件は各組から高々 1 個の数字を使うことになる。 k けたの個数は、使用する組を選び、各組から数字を 1 つ選び、並べる。ただし先頭が 0 のものを除く。(2) では 1 けたから 3 けたまでの総数を引き、4 けたの中で何番目かを求め、千の位、百の位、十の位の順にブロック数で絞り込む。

【解答】

(1) 2 つの数字の和が 9 になる組は $\{0, 9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ である。条件は、これら 5 組の各組から高々 1 つの数字を使うことと同値である。

4 けたの数を作るには、まず 5 組から 4 組を選び、各組から 1 つずつ数字を選び、それら 4 つを並べる。先頭が 0 であるものも含めて数えると ${}_5C_4 2^4 \cdot 4!$ 通りである。

ここから先頭が 0 のものを除く。先頭に 0 を使うには組 $\{0, 9\}$ を使い、残り 3 けたには他の 4 組から 3 組を選ぶ。各組から 1 つずつ数字を選び、残り 3 つの位置に並べるので ${}_4C_3 2^3 \cdot 3!$ 通りである。したがって、求める個数は

$${}_5C_4 2^4 \cdot 4! - {}_4C_3 2^3 \cdot 3! = 5 \cdot 16 \cdot 24 - 4 \cdot 8 \cdot 6 = 1728$$

である。

(2) まず 3 けた以下の個数を数える。1 けたの正の整数は 1 から 9 までの 9 個である。

2 けたのものは、先頭 0 を除いて ${}_5C_2 2^2 \cdot 2! - {}_4C_1 2 \cdot 1! = 80 - 8 = 72$ 個である。3 けたのものは

$${}_5C_3 2^3 \cdot 3! - {}_4C_2 2^2 \cdot 2! = 480 - 48 = 432$$

個である。よって 3 けた以下は $9 + 72 + 432 = 513$ 個である。

したがって 2000 番目の数は、4 けたの数の中で $2000 - 513 = 1487$ 番目である。

千の位を 1 つ固定する。千の位は 0 ではなく、その数字が属する組はもう使えない。残り 4 組から 3 組を選び、各組から 1 つ選んで残り 3 けたに並べるので、千の位を固定したときの個数は ${}_4C_3 2^3 \cdot 3! = 192$ である。 $7 \cdot 192 = 1344$ 、 $8 \cdot 192 = 1536$ だから、1487 番目の千の位は 8 である。8 で始まる数の中では $1487 - 1344 = 143$ 番目である。

千の位が 8 のとき、使えない組は $\{1, 8\}$ である。百の位に使える数字は小さい順に 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 である。百の位を 1 つ固定すると、残り 2 けたは、残り 3 組から 2 組を選び、各組から 1 つ選んで並べるので ${}_3C_2 2^2 \cdot 2! = 24$ 個である。 $5 \cdot 24 = 120$ 、 $6 \cdot 24 = 144$ だから、百の位は 6 である。86 で始まる数の中では $143 - 120 = 23$ 番目である。86 で始まるとき、使えない組は $\{1, 8\}$ と $\{3, 6\}$ である。十の位に使える数字は小さい順に 0, 2, 4, 5, 7, 9 である。十の位を 1 つ固定すると、一の位は残り 2 組から 1 つを選び、その中の数字を 1 つ選ぶので 4 通りである。 $5 \cdot 4 = 20$ 、 $6 \cdot 4 = 24$ だから、十の位は 9 である。869 で始まる数の中では $23 - 20 = 3$ 番目である。869 で始まるとき、残る組は $\{2, 7\}$ と $\{4, 5\}$ である。一の位に使える数字は小さい順に 2, 4, 5, 7 であり、3 番目は 5 である。よって小さい方から数えて 2000 番目の S の要素は 8695 である。

▶ 解法 2 (残り組数の数え上げ表)

【方針】

数字を和が 9 の 5 組にまとめ、残り r 組から m 桁を埋める個数 $N(r, m) = {}_r C_m 2^m m!$ を基本ブロックとする。桁を左から固定し、各候補のブロック数を表にして 2000 番目を追跡する。

【解答】

(1) 数字を

$$\{0, 9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$$

の 5 組に分ける。1 つの組から使える数字は高々 1 個である。5 組から 4 組を選び、数字を選んで並べた総数から先頭 0 の場合を引くと

$$5 \cdot 2^4 \cdot 4! - 4 \cdot 2^3 \cdot 3! = 1920 - 192 = 1728.$$

(2) 同じ計算により、1 桁、2 桁、3 桁の個数は順に

$$9, \quad 10 \cdot 4 \cdot 2! - 4 \cdot 2 = 72, \quad 10 \cdot 8 \cdot 3! - 6 \cdot 4 \cdot 2! = 432.$$

したがって 2000 番目は、4 桁の中の

$$2000 - (9 + 72 + 432) = 1487$$

番目である。

先頭の数字を固定すると、残り 4 組から 3 組を使うので 1 ブロックは

$$4 \cdot 2^3 \cdot 3! = 192$$

個である。1487 番目は、先頭 1 から 7 までの $7 \cdot 192 = 1344$ 個の次なので、千の位は 8、ブロック内では 143 番目である。

8 を使うと、百の位の候補は

$$0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$$

である。1 候補につき残りは

$$3 \cdot 2^2 \cdot 2! = 24$$

個だから、 $143 = 5 \cdot 24 + 23$ より百の位は 6、残りは 23 番目となる。

86 の後の十の位候補は

$$0, 2, 4, 5, 7, 9$$

であり、1 候補につき一の位は 4 通りである。 $23 = 5 \cdot 4 + 3$ より十の位は 9。残る一の位候補 2, 4, 5, 7 の 3 番目は 5 である。よって求める数は

$$8695.$$

【総評】 難度 7、計算量 7。和が 9 の 5 組から高々 1 個という構造に置き換えると、桁数別の個数と辞書順の順位を同じ原理で処理できる。先頭 0 を除く補正と、2000 番目を 4 桁内の 1487 番目へ直す操作が誤りやすい。各接頭辞のブロック数を再計算し、8695 を独立に確認した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 6 問】

(1) a, b, c を正の実数とすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 x, y, z を a, b, c で表せ。

(2) a, b, c が $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 2, 1 \leq c \leq 2$ の範囲を動くとき、(1) の x, y, z を座標とする点 (x, y, z) が描く立体を K とする。立体 K を平面 $y = t$ で切った切り口の面積を求めよ。

(3) この立体 K の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) は 3 つの上三角行列を直接掛け、対応する成分を比較する。 $y = a + c, z = ab/(a + c), x = bc/(a + c)$ が得られる。(2) では $y = t$ を固定すると $a + c = t$ であり、 a の範囲は $2 \leq t \leq 3$ と $3 \leq t \leq 4$ で変わる。さらに $x + z = b, z/(x + z) = a/t$ と見ると、切り口は (x, z) 平面で 2 本の半直線と $x + z = 1, 2$ に囲まれる部分になる。面積は相似な三角形の差で求め、(3) で t について積分する。

【解答】

(1) 左辺を順に掛けると

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + c & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

右辺は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y & yz \\ 0 & 1 & x + z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

成分を比較して $y = a + c, yz = ab, x + z = b$ を得る。 $a + c > 0$ なので $z = \frac{ab}{a + c}, x = b - z = \frac{bc}{a + c}$ である。したがって $x = \frac{bc}{a + c}, y = a + c, z = \frac{ab}{a + c}$ である。

(2) $y = t$ と固定する。 $y = a + c$ なので $t = a + c$ である。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq c \leq 2$ より、切り口が空でないのは $2 \leq t \leq 4$ のときである。

また (1) より $x + z = b, \frac{z}{x + z} = \frac{a}{a + c} = \frac{a}{t}$ である。ここで $1 \leq b \leq 2$ だから $1 \leq x + z \leq 2$ である。 $2 \leq t \leq 3$ のとき、 $c = t - a$ が $1 \leq c \leq 2$ を満たすためには $1 \leq a \leq t - 1$ である。よって $\frac{1}{t} \leq \frac{z}{x + z} \leq \frac{t - 1}{t}$ である。 $3 \leq t \leq 4$ のときは $t - 2 \leq a \leq 2$ であるから $\frac{t - 2}{t} \leq \frac{z}{x + z} \leq \frac{2}{t}$ である。

一般に $r_1 \leq \frac{z}{x + z} \leq r_2, 1 \leq x + z \leq 2$ で表される部分を考える。2 本の境界 $z/(x + z) = r_1, r_2$ は原点を通る半直線である。直線 $x + z = 1$ 上での交点は $(1 - r_1, r_1), (1 - r_2, r_2)$ である。原点とこの 2 点でできる三角形の面積は $\frac{1}{2}|(1 - r_1)r_2 - (1 - r_2)r_1| = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ である。直線 $x + z = 2$ まで拡大した三角形は相似比 2 なので面積は 4 倍である。したがって、 $1 \leq x + z \leq 2$ に挟まれた部分の面積は $4 \cdot \frac{1}{2}(r_2 - r_1) - \frac{1}{2}(r_2 - r_1) = \frac{3}{2}(r_2 - r_1)$ である。

よって切り口の面積を $A(t)$ とすると

$$A(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{t-1}{t} - \frac{1}{t} \right) & (2 \leq t \leq 3), \\ \frac{3}{2} \left(\frac{2}{t} - \frac{t-2}{t} \right) & (3 \leq t \leq 4) \end{cases}$$

である。整理して

$$A(t) = \begin{cases} \frac{3(t-2)}{2t} & (2 \leq t \leq 3), \\ \frac{3(4-t)}{2t} & (3 \leq t \leq 4) \end{cases}$$

である。

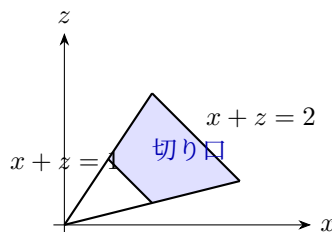
(3) 体積は切り口面積を t で積分して

$$\int_2^3 \frac{3(t-2)}{2t} dt + \int_3^4 \frac{3(4-t)}{2t} dt$$

である。これを計算すると

$$\frac{3}{2} \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{t} \right) dt + \frac{3}{2} \int_3^4 \left(\frac{4}{t} - 1 \right) dt$$

であるから $\frac{3}{2}[t - 2 \log t]_2^3 + \frac{3}{2}[4 \log t - t]_3^4$ となる。整理して $\frac{3}{2}\{(1 + 2 \log 2 - 2 \log 3) + (-1 + 8 \log 2 - 4 \log 3)\}$ であり、これは $3(5 \log 2 - 3 \log 3) = 3 \log \frac{32}{27}$ である。よって立体 K の体積は $3 \log \frac{32}{27}$ である。



▶ 解法 2 (変数変換の面積倍率)

【方針】

$t = a + c$, $r = a/(a + c)$ と置くと $(x, z) = (b(1 - r), br)$ になる。 (b, r) から (x, z) への面積倍率が b であることを使い、切り口面積と体積を積分で一続きに求める。

【解答】

(1) 両辺の行列を掛けて成分を比較すると

$$y = a + c, \quad yz = ab, \quad x + z = b.$$

よって

$$x = \frac{bc}{a + c}, \quad y = a + c, \quad z = \frac{ab}{a + c}.$$

(2)

$$t = a + c, \quad r = \frac{a}{a + c}$$

とおくと

$$y = t, \quad x = b(1 - r), \quad z = br.$$

固定した t に対し、 (b, r) から (x, z) への面積倍率は

$$\begin{vmatrix} 1 - r & -b \\ r & b \end{vmatrix} = b$$

である。また $1 \leq b \leq 2$ である。

$2 \leq t \leq 3$ では $1 \leq a \leq t-1$ なので

$$\frac{1}{t} \leq r \leq \frac{t-1}{t}.$$

したがって切り口面積は

$$A(t) = \int_1^2 \int_{1/t}^{(t-1)/t} b \, dr \, db = \frac{3(t-2)}{2t}.$$

同様に $3 \leq t \leq 4$ では $t-2 \leq a \leq 2$ より

$$A(t) = \int_1^2 \int_{(t-2)/t}^{2/t} b \, dr \, db = \frac{3(4-t)}{2t}.$$

範囲外では切り口は空である。

(3) 以上から

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \frac{3}{2} \int_2^3 \frac{t-2}{t} dt + \frac{3}{2} \int_3^4 \frac{4-t}{t} dt \\ &= 3 \log \frac{32}{27}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 8、計算量 8。行列積から得た $y=a+c$ 、 $x+z=b$ 、 $z/(x+z)=a/(a+c)$ が立体の幾何を表す。切り口を相似三角形の差として求める方法と、変数変換の面積倍率 b を積分する方法を併記した。 $t=3$ で 2 つの面積式が一致し、 $t=2,4$ で 0 になることも整合性の確認になる。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。