

入 学 試 験 問 題

数 学



東京大学 2001 年度 理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

任意の自然数 $n \geq 2$ に対して常に

$$n - \sum_{k=2}^n \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \geq \frac{i}{10}$$

が成立するような最大の整数 i を求めよ。

第 2 問

- (1) 図1のように、等間隔 h で格子状に互いに直交する2組の無数の平行線が引いてある平面が与えられている。その上に半径1の円 C を無作為に落とすとき、この円がちょうど2本の線と交わる確率 p を求めよ。
- (2) 図2のように、半径 $\sqrt{2}+1$ の円が重複なく、かつ隣り合う円と接して無数に敷き詰められた平面がある。この上に半径1の円 C を無作為に落とすとき、円 C が平面上のちょうど3つの円と交わる確率 q を求めよ。

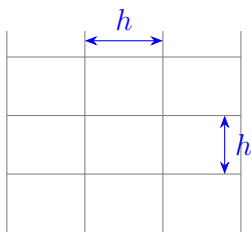


図 1

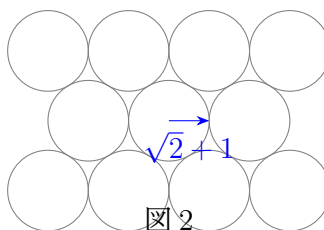


図 2

ただし、解答にあたり次のことを用いてよい。原点 O を始点とする一次独立な2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る基本平行四辺形を E とする。 E 内の領域 F を $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) だけ平行移動した領域全体を D とするとき、平面に1点を無作為に落としてその点が D 内に入る確率は

$$\frac{F \text{ の面積}}{E \text{ の面積}}$$

である。

第 3 問

整数を係数とする 2 次式 $f(x)$ で、2 次の項の係数が正であるものが与えられている。任意の実数 x に対して、原点を中心とする単位円 C 上の点を

$$P(x) = (\cos 2\pi f(x), \sin 2\pi f(x))$$

によって定める。円周 C の長さ L ($0 < L < 2\pi$) の弧 I を固定する。各自然数 k に対して

$$\{x \mid k \leq x \leq k+1, P(x) \in I\}$$

は互いに交わらない有限個の区間の和集合になるので、それらの区間の長さの総和を T_k とする。このとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \frac{L}{2\pi}$$

を証明せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)