

東京大学 2001 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

任意の自然数 $n \geq 2$ に対して常に

$$n - \sum_{k=2}^n \frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \geq \frac{i}{10}$$

が成立するような最大の整数 i を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

左辺を

$$1 - \sum d_k$$

、 $d_k = k/\sqrt{k^2-1} - 1$ と書く。まず d_k を望遠和になる $1/[2(k^2-1)]$ で上から押さえて $i = 6$ を保証する。次に $n = 40$ で d_k を下から評価し、 $i = 7$ が不可能と示す。

【解答】

$$d_k = \frac{k}{\sqrt{k^2-1}} - 1$$

とおく。すると問題の左辺 A_n は

$$A_n = 1 - \sum_{k=2}^n d_k$$

である。ここで

$$d_k = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}\{k + \sqrt{k^2-1}\}} \leq \frac{1}{2(k^2-1)}.$$

最後の不等式は $\sqrt{k^2-1} \leq k$ と同値である。従って

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n d_k &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &< \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

よって

$$A_n > 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} > \frac{6}{10}$$

であり、 $i = 6$ はすべての n で条件を満たす。

一方、 $d_k > 1/(2k^2)$ である。また正の量を平方して比較すれば

$$d_2 > \frac{3}{20}, \quad d_3 > \frac{3}{50}, \quad d_4 > \frac{3}{100}, \quad d_5 > \frac{1}{50}$$

が分かる。従って

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{40} d_k &> \frac{13}{50} + 5 \cdot \frac{1}{200} + 10 \cdot \frac{1}{800} + 20 \cdot \frac{1}{3200} \\ &= \frac{243}{800} > \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

ここでは $6 \leq k \leq 10$ 、 $11 \leq k \leq 20$ 、 $21 \leq k \leq 40$ の 3 群で $1/(2k^2)$ をそれぞれ一様に下から押さえた。従って

$$A_{40} < 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10},$$

なので $i = 7$ は条件を満たさない。

以上より最大の整数は

$$i = 6$$

である。

▶ 解法 2 (二次までの代数的評価)

【方針】

各項を $(1 - k^{-2})^{-1/2} - 1$ と見る。上からは望遠和、下からは平方して証明できる二次評価を用い、 $i = 6$ の一様成立と $i = 7$ の反例を別々に示す。

【解答】

$$d_k = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}\{k + \sqrt{k^2 - 1}\}}$$

とおく。まず

$$d_k \leq \frac{1}{2(k^2 - 1)}$$

だから

$$\sum_{k=2}^n d_k \leq \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) < \frac{3}{8}.$$

したがって、すべての $n \geq 2$ に対して

$$n - \sum_{k=2}^n \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} = 1 - \sum_{k=2}^n d_k > \frac{5}{8} > \frac{6}{10}.$$

次に $0 < x < 1$ に対し

$$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} \right)^2 (1 - x) = 1 - \frac{5}{8}x^3 - \frac{15}{64}x^4 - \frac{9}{64}x^5 < 1.$$

両辺は正なので

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} > 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}.$$

$x = 1/k^2$ とすれば

$$d_k > \frac{1}{2k^2} + \frac{3}{8k^4}.$$

よって $n = 9$ では

$$\sum_{k=2}^9 d_k > \sum_{k=2}^9 \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{3}{8k^4} \right) = \frac{32327672734081}{107540213760000} > \frac{3}{10}.$$

したがって左辺は $7/10$ 未満となり、 $i = 7$ は不可能である。以上より最大の整数は

$$i = 6.$$

【総評】 難度 8、計算量 6。想定時間は 30 分程度。極限值そのものを求める必要はなく、0.6 より上である一様評価と、0.7 を下回る具体例の二方向を示せば整数 i が確定する。望遠和の上界と、有限ブロックに分けた下界を使い分ける。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 2 問】

- (1) 図 1 のように、等間隔 h で格子状に互いに直交する 2 組の無数の平行線が引いてある平面が与えられている。その上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき、この円がちょうど 2 本の線と交わる確率 p を求めよ。
- (2) 図 2 のように、半径 $\sqrt{2} + 1$ の円が重複なく、かつ隣り合う円と接して無数に敷き詰められた平面がある。この上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき、円 C が平面上のちょうど 3 つの円と交わる確率 q を求めよ。

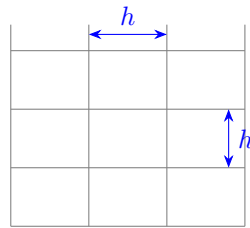


図 1

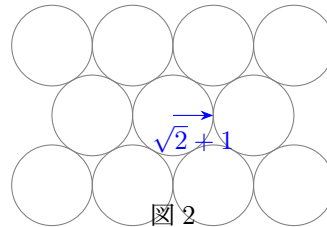


図 2

ただし、解答にあたり次のことを用いてよい。原点 O を始点とする一次独立な 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る基本平行四辺形を E とする。 E 内の領域 F を $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) だけ平行移動した領域全体を D とするとき、平面に 1 点を無作為に落としてその点が D 内に入る確率は

$$\frac{F \text{ の面積}}{E \text{ の面積}}$$

である。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 円の中心を一つの $h \times h$ 基本正方形に限定し、各座標方向で距離 1 以内にある格子線の本数を数える。 $h \leq 1$ 、 $1 < h < 2$ 、 $h \geq 2$ で場合分けする。(2) 既存円の中心が作る正三角形を基本領域とし、3 頂点を中心とする半径 $\sqrt{2} + 2$ の円の共通部分の面積を求める。

【解答】

(1) 円の中心を一つの格子正方形 $[0, h] \times [0, h]$ に限定する。ある座標方向について、中心から距離 1 以内にある格子線の本数を N とする。

$h \geq 2$ では $N = 1$ となる部分の長さは 2、 $N = 0$ となる部分の長さは $h - 2$ である。ちょうど 2 本と交わるには縦横とも $N = 1$ であればよいから

$$p = \frac{2^2}{h^2} = \frac{4}{h^2}.$$

$1 < h < 2$ では各方向で少なくとも 1 本と交わる。ちょうど 1 本と交わる座標の範囲は両端側に長さ $h - 1$ ずつあり、合計 $2(h - 1)$ である。従って

$$p = \frac{\{2(h - 1)\}^2}{h^2} = \frac{4(h - 1)^2}{h^2}.$$

$0 < h \leq 1$ では各方向で少なくとも 2 本の格子線と交わるので、合計が 2 本になることはない。以上より

$$p = \begin{cases} 0 & (0 < h \leq 1), \\ \frac{4(h - 1)^2}{h^2} & (1 < h < 2), \\ \frac{4}{h^2} & (h \geq 2). \end{cases}$$

境界上の接触は面積 0 の集合なので確率に影響しない。

(2) 既存円の半径を $R = \sqrt{2} + 1$ とする。隣接する中心間距離は

$$d = 2R = 2(\sqrt{2} + 1).$$

小円が既存円と交わるための中心間距離は

$$R - 1 = \sqrt{2} \text{ 以上, } R + 1 = \sqrt{2} + 2 \text{ 以下}$$

である。ここで

$$d = \sqrt{2}\rho.$$

隣接 3 中心が作る正三角形を基本領域とする。小円がこの 3 円すべてと交わる中心位置は、3 頂点を中心とする半径 ρ の 3 円の共通部分 F である。この共通部分では、ある頂点までの距離が $\sqrt{2}$ 未満なら別の頂点までの距離が $d - \sqrt{2} = \rho$ を超えるため、下限条件も自動的に満たされる。またこの半径では 4 中心との同時交差は起こらない。

2 円の内側の交点を 3 組取ると、それらは一辺

$$s = \rho\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

の正三角形を作る。各頂点中心で共通部分を囲む弧の中心角は $\pi/6$ である。従って

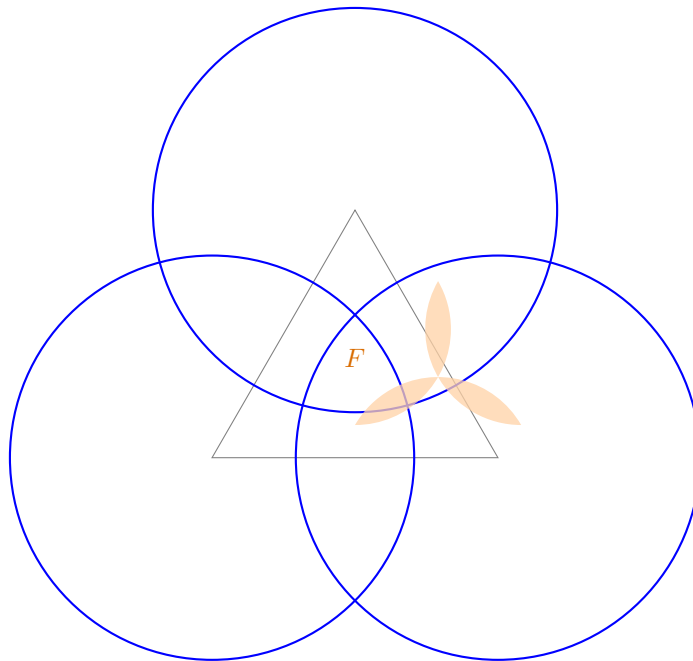
$$\begin{aligned} |F| &= \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + 3 \cdot \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\rho^2}{4}(\pi + 2\sqrt{3} - 6). \end{aligned}$$

基本正三角形の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2.$$

よって

$$q = \frac{|F|}{(\sqrt{3}/2)\rho^2} = \frac{\pi + 2\sqrt{3} - 6}{2\sqrt{3}}.$$



▶ 解法 2 (基本平行四辺形で面積比を取る)

【方針】

(1) は基本正方形内で、縦横それぞれちょうど 1 本の格子線から距離 1 以内となる帯の面積を測る。(2) は三角格子の基本平行四辺形を 2 つの正三角形へ分け、各三角形中央の曲辺三角形の面積を数える。

【解答】

(1)

円の中心を 1 つの $h \times h$ 基本正方形に落とす。 $h \geq 2$ では、1 方向についてちょうど 1 本の格子線と交わる座標の全長は 2 だから、有利な中心領域は面積 4 である。 $1 < h < 2$ ではその全長は $2(h-1)$ である。 $h \leq 1$ では縦横とも少なくとも 2 本と交わる。よって

$$p = \begin{cases} 0 & (0 < h \leq 1), \\ \frac{4(h-1)^2}{h^2} & (1 < h < 2), \\ \frac{4}{h^2} & (h \geq 2). \end{cases}$$

(2)

既存円の中心間距離を d 、小円の中心が既存円と交わり得る最大距離を ρ とすると

$$d = 2(\sqrt{2} + 1), \quad \rho = \sqrt{2} + 2, \quad d = \sqrt{2}\rho.$$

三角格子の基本平行四辺形は、一辺 d の正三角形 2 個からなる。各正三角形内で 3 つの既存円すべてと交わる中心領域を F とする。

半径 ρ の 3 円の内側の交点を作る正三角形の一辺は

$$s = \rho\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

境界弧の中心角は $\pi/6$ である。したがって

$$\begin{aligned} |F| &= \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + 3 \cdot \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\rho^2}{4}(\pi + 2\sqrt{3} - 6). \end{aligned}$$

基本平行四辺形には同じ領域が 2 個あり、その面積は

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = \sqrt{3}\rho^2.$$

よって

$$q = \frac{2|F|}{\sqrt{3}\rho^2} = \frac{\pi + 2\sqrt{3} - 6}{2\sqrt{3}}.$$

距離が $\sqrt{2}$ 未満となる内包位置は、別の中心からの距離が ρ を超えるため F に入らず、「交わる」の下限条件も満たされている。

【総評】 難度 9、計算量 8。想定時間は 40 分程度。(1) は h に制限がないため 3 区間の場合分けが必要である。(2) は中心間距離の下限と上限の両方を確認する。三角格子の基本正三角形内では、求める領域は 3 円共通部分の曲辺三角形になり、中心角は $\pi/6$ となる。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 3 問】

整数を係数とする 2 次式 $f(x)$ で、2 次の項の係数が正であるものが与えられている。任意の実数 x に対して、原点を中心とする単位円 C 上の点を

$$P(x) = (\cos 2\pi f(x), \sin 2\pi f(x))$$

によって定める。円周 C の長さ L ($0 < L < 2\pi$) の弧 I を固定する。各自然数 k に対して

$$\{x \mid k \leq x \leq k+1, P(x) \in I\}$$

は互いに交わらない有限個の区間の和集合になるので、それらの区間の長さの総和を T_k とする。このとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \frac{L}{2\pi}$$

を証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

$f(x) = ax^2 + bx + c$ と置き、十分大きい k で単調増加とする。変数 $y = f(x)$ に移すと、 $[f(k), f(k+1)]$ は整数個の 1 周期に分かれ、各周期で弧に対応する y の長さは $L/(2\pi)$ である。逆関数の微分を区間両端の f' で挟む。

【解答】

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。ただし a は正の整数である。十分大きい k では $f'(x) = 2ax + b > 0$ が $[k, k+1]$ で成り立つので、以下そのような k を考える。

$$M = f(k), \quad N = f(k+1), \quad D = N - M$$

とおく。係数と k は整数だから M, N, D は整数であり

$$D = 2ak + a + b.$$

$y = f(x)$ と変数を移すと、 y は $[M, N]$ を動き、この区間は長さ 1 の区間を D 個含む。各 1 周期の中で $P(x) \in I$ に対応する y の集合の長さは

$$\ell = \frac{L}{2\pi}$$

である。弧が角度 0 の位置をまたぐ場合も、二つの区間に分かれるだけで長さの和は ℓ である。

逆関数を $x = x(y)$ とすると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x(y))}.$$

f' は増加するから、 $k \leq x(y) \leq k+1$ で

$$\frac{1}{f'(k+1)} \leq \frac{dx}{dy} \leq \frac{1}{f'(k)}.$$

弧に対応する y の全長は $D\ell$ なので、積分して

$$\frac{D\ell}{f'(k+1)} \leq T_k \leq \frac{D\ell}{f'(k)}.$$

ここで

$$f'(k) = 2ak + b, \quad f'(k+1) = 2ak + 2a + b, \quad D = 2ak + a + b.$$

従って

$$\frac{D}{f'(k+1)} \rightarrow 1, \quad \frac{D}{f'(k)} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

はさみうちにより

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \ell = \frac{L}{2\pi}.$$

▶ 解法 2 (1 周期ごとの誤差を足す)

【方針】

変数 $y = f(x)$ で弧の条件を周期 1 の指示関数に直す。逆関数の微分は 1 周期内でほぼ一定なので、各周期の平均からの誤差を振幅で押さえ、全周期について望遠的に足す。

【解答】

弧 I に対応する y の小数部分の集合を J とし、

$$\ell = |J| = \frac{L}{2\pi}$$

とおく。十分大きい k では f は $[k, k+1]$ で増加する。

$$M = f(k), \quad N = f(k+1)$$

は整数である。

逆関数を $x = x(y)$ とし

$$g(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x(y))}$$

とおく。 f' は増加するので g は減少する。また

$$\int_M^N g(y) dy = 1.$$

$\chi(y)$ を、小数部分が J に入るとき 1、その他で 0 となる周期 1 の関数とする。各整数区間 $[j, j+1]$ で

$$\int_j^{j+1} \{\chi(y) - \ell\} dy = 0.$$

したがって、この区間における積分

$$\int_j^{j+1} (\chi - \ell)g dy$$

の絶対値は $g(j) - g(j+1)$ 以下である。全区間を足すと

$$\begin{aligned} |T_k - \ell| &= \left| \int_M^N \{\chi(y) - \ell\} g(y) dy \right| \\ &\leq \sum_{j=M}^{N-1} \{g(j) - g(j+1)\} \\ &= g(M) - g(N). \end{aligned}$$

$$0 \leq g(M) - g(N) \leq \frac{1}{f'(k)} - \frac{1}{f'(k+1)} \rightarrow 0.$$

よって

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \ell = \frac{L}{2\pi}.$$

【総評】 難度 9、計算量 8。想定時間は 40 分程度。整数係数なので $f(k), f(k+1)$ が整数となり、区間内の回転数がちょうど整数になる点が核心である。各回転の滞在時間は完全には等しくないが、逆関数の微分の最大・最小で全体を挟むと誤差が消える。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性和十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。