

東京大学 2001 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 $ABCD$ の各辺の長さは、

$$AB = \sqrt{3}, \quad AC = AD = BC = BD = CD = 2$$

を満たしている。このとき r の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

辺 AB の中点を原点に置き、 AB を座標軸に取る。 C, D はともに A, B から距離 2 なので、 AB の垂直二等分平面上にある。さらに $CD = 2$ を満たすように C, D を対称に置けば、外接球の中心も対称性から 1 本の直線上に限られる。最後は $OA = OC$ を立てて中心の位置を決め、半径を求める。

【解答】

座標を

$$A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), \quad B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$$

とおく。このとき $AB = \sqrt{3}$ である。

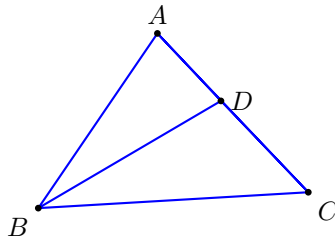
点 C, D はともに A, B から距離 2 にあるので、 AB の垂直二等分平面、すなわち平面 $x = 0$ 上にある。さらに $CD = 2$ であるから、 C, D を対称に $C = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$, $D = \left(0, -1, \frac{3}{2}\right)$ と置ける。実際、 $AC^2 = BC^2 = \frac{3}{4} + 1 + \frac{9}{4} = 4$, かつ $CD = 2$ であり、 D についても同じである。

外接球の中心を O とする。 A, B から等距離で、かつ C, D からも等距離でなければならないので、対称性から $O = (0, 0, z)$ とおける。条件 $OA = OC$ より $\frac{3}{4} + z^2 = 1 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2$ である。右辺を展開すると $1 + z^2 - 3z + \frac{9}{4} = z^2 - 3z + \frac{13}{4}$ だから $\frac{3}{4} = z^2 - 3z + \frac{13}{4} - z^2$ すなわち $3z = \frac{5}{2}$ となる。よって $z = \frac{5}{6}$ である。

したがって半径 r は

$$r^2 = OA^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{27}{36} + \frac{25}{36} = \frac{13}{9}$$

を満たす。半径は正なので $r = \frac{\sqrt{13}}{3}$ である。



▶ 解法 2 (2 組の中点を結ぶ)

【方針】

辺 AB, CD の中点を M, N とする。対称性により外接球の中心は直線 MN 上にある。直角三角形から MN を求め、中心から 2 種類の辺端点までの距離を等置する。

【解答】

辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とする。 C, D はともに A, B から等距離にあるので、 C, D は AB の垂直二等分面上にあり

$$MN \perp AB.$$

また $NC = ND = 1$ である。直角三角形 AMC から

$$MC^2 = AC^2 - AM^2 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}.$$

さらに直角三角形 MNC から

$$MN^2 = MC^2 - NC^2 = \frac{13}{4} - 1 = \frac{9}{4},$$

したがって $MN = 3/2$ である。

外接球の中心 O は、 A, B を交換する対称性と C, D を交換する対称性から直線 MN 上にある。 $OM = s$ とおくと $ON = 3/2 - s$ であり、

$$OA^2 = s^2 + \frac{3}{4}, \quad OC^2 = \left(\frac{3}{2} - s\right)^2 + 1.$$

$OA = OC$ より

$$s^2 + \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{2} - s\right)^2 + 1,$$

したがって $s = 5/6$ である。よって

$$r^2 = OA^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{13}{9}.$$

半径は正なので

$$r = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

【総評】 難度 5、計算量 4。空間図形だが、距離条件が対称なので座標化すると短く処理できる。採点上は、 C, D を AB の垂直二等分平面上に置く理由、外接球の中心が $(0, 0, z)$ と置ける理由、 $OA = OC$ から中心を決める計算を明記したい。よくある誤りは、四面体の高さ外接球の半径を混同すること、また $CD = 2$ の条件を座標に反映し忘れることである。目安は 12 分程度。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性和十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 2 問】

次の等式を満たす関数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) がただ一つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また、そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+y)f(y) dy + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y) dy + \sin x + \cos x$$

ただし、 $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続な関数とする。

▶ 解法 1

【方針】

加法定理で $\sin(x+y)$ と $\cos(x-y)$ を展開すると、右辺は必ず $\sin x$ と $\cos x$ の一次結合になる。したがって解があるなら $f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ と置ける。直交性

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 y dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 y dy = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin y \cos y dy = 0$$

を使って α, β の連立一次方程式に帰着し、和と差を取って一意性の条件を調べる。

【解答】

加法定理より $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ である。したがって与えられた等式の右辺は、どのような連続関数 f に対しても $\sin x$ と $\cos x$ の一次結合になる。よって解が存在するなら $f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ と書ける。

このとき

$$\int_0^{2\pi} \sin y f(y) dy = \alpha \int_0^{2\pi} \sin^2 y dy + \beta \int_0^{2\pi} \sin y \cos y dy = \pi \alpha$$

であり、同様に

$$\int_0^{2\pi} \cos y f(y) dy = \pi \beta$$

である。

これをもとの等式に代入すると、 $\sin x$ の係数は $\frac{a}{2}\beta + \frac{b}{2}\alpha + 1$ であり、 $\cos x$ の係数は $\frac{a}{2}\alpha + \frac{b}{2}\beta + 1$ である。したがって係数比較により

$$\alpha = \frac{a}{2}\beta + \frac{b}{2}\alpha + 1, \quad \beta = \frac{a}{2}\alpha + \frac{b}{2}\beta + 1$$

を得る。両式を整理して 2 倍すると $(2-b)\alpha - a\beta = 2$, $-a\alpha + (2-b)\beta = 2$ である。

この 2 式を加えると $(2-a-b)(\alpha+\beta) = 4$ であり、引くと $(2+a-b)(\alpha-\beta) = 0$ である。

ここで $2-a-b=0$ なら、上の和の式が $0=4$ となり、解は存在しない。また $2+a-b=0$ のときは、差 $\alpha-\beta$ が一意に決まらない。ただし同時に $2-a-b=0$ となる場合はすでに解が存在しない場合に含まれる。したがって、関数 f がただ一つ定まるための条件は $2-a-b \neq 0$, $2+a-b \neq 0$ である。すなわち $b \neq 2-a$, $b \neq 2+a$ である。

この条件のもとでは $\alpha + \beta = \frac{4}{2-a-b}$, $\alpha - \beta = 0$ であるから $\alpha = \beta = \frac{2}{2-a-b}$ となる。よって求める関数は

$$f(x) = \frac{2}{2-a-b}(\sin x + \cos x) \text{ である。}$$

▶ 解法 2 (2 つの固有方向に分ける)

【方針】

右辺が $\sin x, \cos x$ の一次結合になることを確認し、 $\sin x + \cos x$ と $\sin x - \cos x$ の 2 方向に分解する。各方向の倍率が 1 でないことが一意性条件になる。

【解答】

加法定理から、積分を含む部分は任意の f に対して $\sin x, \cos x$ の一次結合になる。したがって解は

$$f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$$

の形に限られる。

$$u = \alpha + \beta, \quad v = \alpha - \beta$$

とおく。積分作用は $\sin x + \cos x$ 方向を $(a+b)/2$ 倍し、 $\sin x - \cos x$ 方向を $(b-a)/2$ 倍する。また非斉次項は $\sin x + \cos x$ である。よって与式は

$$\left(1 - \frac{a+b}{2}\right)u = 2, \quad \left(1 - \frac{b-a}{2}\right)v = 0$$

と同値である。

第 1 の係数が 0 なら $0 = 2$ となって解がなく、第 2 の係数が 0 なら v が自由になって解が一意でない。したがって一意に定まる条件は

$$a + b \neq 2, \quad b - a \neq 2,$$

すなわち

$$b \neq 2 - a, \quad b \neq 2 + a.$$

このとき

$$u = \frac{4}{2 - a - b}, \quad v = 0$$

だから $\alpha = \beta = 2/(2 - a - b)$ であり、

$$f(x) = \frac{2}{2 - a - b}(\sin x + \cos x).$$

【総評】 難度 7、計算量 6。積分方程式に見えるが、加法定理により未知量は $\sin x$ と $\cos x$ の係数 2 つだけになる。採点上は、解がこの 2 次元の形に限られる理由、三角関数の直交性による積分計算、連立一次方程式の一意性条件を順に書く必要がある。特に $b = 2 - a$ では和の式が矛盾し、 $b = 2 + a$ では差が自由になるため、「係数が 0 だから除外」とだけ書くと説明不足になりやすい。目安は 20 分程度。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 3 問】

実数 $t > 1$ に対し, xy 平面上の点 $O(0,0)$, $P(1,1)$, $Q\left(t, \frac{1}{t}\right)$ を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし, 線分 OP , OQ と双曲線 $xy = 1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと, 関数 $c(t)$ は $t > 1$ においてつねに減少することを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

まず座標から三角形の面積 $a(t)$ を求める。領域 $b(t)$ は, $0 \leq x \leq 1$ では直線 OP と直線 OQ の間, $1 \leq x \leq t$ では双曲線 $xy = 1$ と直線 OQ の間として積分する。相殺により $b(t) = \log t$ となるので, $c(t) = 2t \log t / (t^2 - 1)$ を微分する。最後の符号判定は $\log t > (t^2 - 1) / (t^2 + 1)$ を別関数の微分で示す。

【解答】

三角形 OPQ の面積を求める。 $O = (0,0)$, $P = (1,1)$, $Q = (t, 1/t)$ であるから、座標による面積公式より

$$a(t) = \frac{1}{2} \left| 1 \cdot \frac{1}{t} - 1 \cdot t \right| = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

である。 $t > 1$ なのでこれは正である。

次に $b(t)$ を求める。直線 OP は $y = x$ であり、直線 OQ は傾き $(1/t)/t = 1/t^2$ だから $y = \frac{x}{t^2}$ である。 $0 \leq x \leq 1$ では、囲まれた領域は直線 OP と直線 OQ の間にある。 $1 \leq x \leq t$ では、上側が双曲線 $y = 1/x$ 、下側が直線 $y = x/t^2$ である。したがって

$$\begin{aligned} b(t) &= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{t^2} \right) dx + \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{t^2} \right) dx \\ &= \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \frac{1}{2} + \log t - \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \\ &= \log t. \end{aligned}$$

よって

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{\log t}{(t - 1/t)/2} = \frac{2t \log t}{t^2 - 1}$$

である。

これを微分する。分母は $t > 1$ で正であり、

$$\begin{aligned} c'(t) &= \frac{(2 \log t + 2)(t^2 - 1) - 2t \log t \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2\{(t^2 - 1) - (t^2 + 1) \log t\}}{(t^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

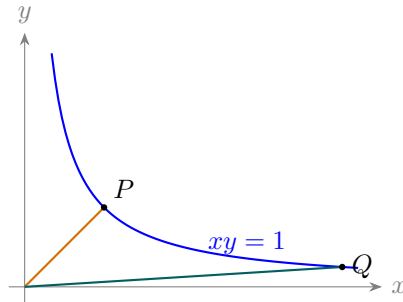
である。

したがって、 $c'(t) < 0$ を示すには $\log t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ を示せばよい。そこで $h(t) = \log t - \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ とおく。微分すると

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{2t(t^2 + 1) - (t^2 - 1)2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{t} - \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(t^2 + 1)^2 - 4t^2}{t(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

である。また $t \rightarrow 1 + 0$ のとき $h(t) \rightarrow 0$ である。よって $t > 1$ では $h(t) > 0$ すなわち $\log t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ が成り立つ。

以上より $(t^2 - 1) - (t^2 + 1) \log t < 0$ であり、分母 $(t^2 - 1)^2$ は正であるから $c'(t) < 0$ である。したがって $c(t)$ は $t > 1$ においてつねに減少する。



▶ 解法 2 (指数変数と積分平均)

【方針】

面積比を求めた後 $t = e^u$ と置く。比の逆数を対称な指数関数の積分平均として表し、被積分関数が u とともに増えることから単調性を示す。

【解答】

座標による三角形の面積と領域の積分から

$$a(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right), \quad b(t) = \log t.$$

したがって

$$c(t) = \frac{2t \log t}{t^2 - 1}.$$

$t = e^u$ ($u > 0$) とおくと

$$c(e^u) = \frac{2u}{e^u - e^{-u}}.$$

ここで

$$H(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2u} = \int_0^1 \frac{e^{us} + e^{-us}}{2} ds$$

と書ける。 $s > 0$, $u > 0$ に対して被積分関数を u で微分すると

$$\frac{s}{2}(e^{us} - e^{-us}) > 0.$$

よって $H(u)$ は $u > 0$ で単調増加する。

$$c(e^u) = \frac{1}{H(u)}$$

なので $c(e^u)$ は単調減少する。 $u = \log t$ は $t > 1$ で単調増加するから、 $c(t)$ も $t > 1$ でつねに減少する。

【総評】 難度 6、計算量 5。面積計算と対数不等式の組合せである。 $b(t)$ は領域を $x = 1$ で分けると余分な 2 つの二次式部分が相殺し、 $\log t$ だけが残る。採点上は、領域の上下関係を説明して積分区間を正しく分けること、微分後に $\log t > (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$ を独立に証明することが重要である。対数不等式を直感で済ませると減点されやすい。目安は 18 分程度。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性和十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 4 問】

複素数平面上の点 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

により定め,

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。
 (2) すべての点 b_n ($n = 1, 2, \dots$) は円 C の周上にあることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

最初に b_1, b_2, b_3 を直接計算し、3 点を通る円を $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ の形で求める。次に漸化式から $b_{n+1} = 1 + 1/b_n$ を導く。円を $x^2 - x + y^2 = 1$ と書き直し、 $z = x + yi$ がこの円上にあるなら $1 + 1/z$ も同じ式を満たすことを実部・虚部で確認する。

【解答】

(1)

漸化式から $a_1 = 1, \quad a_2 = i, \quad a_3 = 1 + i, \quad a_4 = 1 + 2i$ である。したがって $b_1 = \frac{a_2}{a_1} = i, b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1+i}{i} = 1 - i,$

$$b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

である。

円の中心を (α, β) 、半径を R とする。3 点 $(0, 1)$ 、 $(1, -1)$ 、 $(3/2, 1/2)$ が円上にあるので $\alpha^2 + (1 - \beta)^2 = R^2, (1 - \alpha)^2 + (-1 - \beta)^2 = R^2, \left(\frac{3}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 = R^2$ である。第 1 式と第 2 式を引くと $2\alpha - 4\beta = 1$ である。また、第 1 式と第 3 式を引くと $3\alpha - \beta = \frac{3}{2}$ である。これらを連立して $\beta = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}$ を得る。よって $R^2 = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$ である。

したがって円 C の中心は実数 $1/2$ を表す点、半径は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。中心も合わせて書けば 中心 $\frac{1}{2}$, 半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

(2)

まず b_{n+1} と b_n の関係を求める。定義と漸化式より

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{b_n}$$

である。

(1) で求めた円 C の方程式は $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$ すなわち $x^2 - x + y^2 = 1$ である。

ここで $z = x + yi$ が円 C 上にあるとする。この円は原点を通らないので $z \neq 0$ である。 $X + Yi = 1 + 1/z$ とおくと

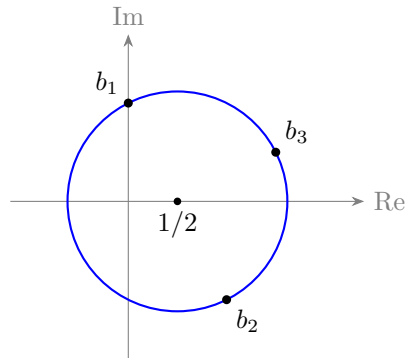
$$1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

だから $X = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ である。よって

$$\begin{aligned} X^2 - X + Y^2 &= \left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x + 1}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

一方、 z が円 C 上にあるので $x^2 - x + y^2 = 1$ であり、これは $x^2 + y^2 = x + 1$ を意味する。したがって $X^2 - X + Y^2 = 1$ である。つまり z が円 C 上にあるなら、 $1 + 1/z$ も円 C 上にある。

(1) より b_1 は円 C 上にある。さらに $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$ であるから、上で示した性質を繰り返し用いれば、数学的帰納法によりすべての b_n は円 C の周上にある。



▶ 解法 2 (円の不变式を保つ)

【方針】

最初の 3 点から円を決める。円を $|z|^2 = \operatorname{Re} z + 1$ と表し、変換 $z \mapsto 1 + 1/z$ がこの等式を保つことを絶対値だけで確認する。

【解答】

(1)

$$b_1 = i, \quad b_2 = 1 - i, \quad b_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

3 点の垂直二等分線を求めると、円 C の中心は $1/2$ 、半径は $\sqrt{5}/2$ である。したがって円の方程式は

$$\left| z - \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{5}{4},$$

すなわち

$$|z|^2 = \operatorname{Re} z + 1.$$

(2)

漸化式から

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}.$$

z が C 上にあり、 $w = 1 + 1/z$ とする。円 C は原点を通らないので $z \neq 0$ である。

$$\begin{aligned} |w|^2 - \operatorname{Re} w - 1 &= \frac{|z+1|^2}{|z|^2} - \left(1 + \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} \right) - 1 \\ &= \frac{\operatorname{Re} z + 1 - |z|^2}{|z|^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって w も C 上にある。 $b_1 = i$ は C 上にあるから、帰納法によりすべての b_n は C の周上にある。

【総評】 難度 6、計算量 5。前半の円の決定は標準的だが、後半では $b_{n+1} = 1 + 1/b_n$ に気づき、円の方程式をこの変換で保たれる形にするのが山場である。採点上は、円を $x^2 - x + y^2 = 1$ と書くこと、 $1 + 1/z$ の実部・虚部を出して同じ式に代入すること、最後に帰納法へつなぐことが必要である。 b_n を直接一般項で求めようとすると計算が重くなりやすい。目安は 18 分程度。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 5 問】

容量 1 リットルの m 個のビーカーに水が入っている。 $m \geq 4$ で空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり、その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき、水の入っているビーカーが 2 個になるまで、次の (a) から (c) までの操作を、順に繰り返す。

- (a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。
- (b) さらに、残りのビーカーの中から、入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。
- (c) 次に、(a) で選んだビーカーの水を (b) で選んだビーカーにすべて移し、空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で、入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは、そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

- (1) $x < \frac{1}{3}$ のとき、最初に x リットルの水の入っていたビーカーは、操作の途中で空になって取り除かれるか、または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。
- (2) $x > \frac{2}{5}$ のとき、最初に x リットルの水の入っていたビーカーは、最後まで x リットルの水が入ったままであることを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

最初に x リットル入っていたビーカーを特別なビーカー X として区別する。(1) は、 X が最後まで水量 x のまま残ると仮定し、最後の操作直前の 3 個を調べる。残り 2 個の和が $1 - x > 2x$ となるため、 X は最後の操作で必ず選ばれて矛盾する。(2) は、非特別ビーカーが 3 個以上ある間、その最小 2 個の和が x 未満であることを $x > 2/5$ から示し、非特別ビーカー同士だけが合併され続けることを帰納的に追う。

【解答】

最初に x リットルの水が入っていたビーカーを X と呼ぶ。初めに X 以外のビーカーには、すべて x リットル未満の水しか入っていない。

(1) $x < 1/3$ とする。 X が途中で取り除かれず、かつ最後まで水の量が x のまま増えないと仮定して矛盾を導く。

最後の操作の直前には、水の入っているビーカーが 3 個ある。そのうち 1 個は X であり、他の 2 個の水量を y, z とする。この時点でも総水量は 1 リットルなので $y + z = 1 - x$ である。いま $x < 1/3$ だから $y + z = 1 - x > \frac{2}{3} > 2x$ である。したがって y, z がともに x 以下であることはできず、少なくとも一方は x より大きい。

すると、3 個の水量 x, y, z のうち、 X の水量 x は大きい方から 1 番目になることはない。すなわち X は水量の少ない 2 個の中に必ず含まれる。最後の操作では水量の少ない 2 個が選ばれるので、 X は必ず選ばれる。

もし X が (a) で選ばれたビーカーなら、その水は別のビーカーへ移され、 X は空になって取り除かれる。もし X が (b) で選ばれたビーカーなら、別のビーカーの水が X に移されるので、 X の水量は x より増える。いずれも仮定に反する。

よって X は、操作の途中で空になって取り除かれるか、または最後まで残って水の量が増えている。

(2) $x > 2/5$ とする。 X 以外のビーカーを非特別ビーカーと呼ぶ。 X が選ばれない限り、非特別ビーカー全体の水量は $1 - x$ のままである。

非特別ビーカーが 3 個以上ある段階を考える。その中で水量の最も少ない 2 個を $y \leq z$ とする。もし $y + z \geq x$ なら、3 番目に少ない非特別ビーカーの水量は少なくとも z であるから、非特別ビーカー全体の水量は少なくとも $y + 2z$ である。ここで $y \leq z$ かつ $y + z \geq x$ より、 $z \geq x/2$ である。したがって $y + 2z = (y + z) + z \geq x + \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x$ となる。よって $1 - x \geq \frac{3}{2}x$ が必要であるが、これは $x \leq \frac{2}{5}$ を意味し、 $x > 2/5$ に反する。

したがって、非特別ビーカーが 3 個以上ある間、その中で最も少ない 2 個の水量の和は常に x 未満である。

初め、非特別ビーカーの水量はいずれも x 未満である。いま非特別ビーカーが 3 個以上あり、すべての非特別ビーカーの水量が x 未満であるとする。このとき、全体の中で水量の最も少ない 2 個は X ではなく非特別ビーカーである。さらに上で示したことから、その 2 個を合併してできるビーカーの水量も x 未満である。

よって帰納的に、非特別ビーカーが 2 個になるまで、操作で選ばれるのは常に非特別ビーカー同士であり、合併後も各非特別ビーカーの水量は x 未満である。

最後の操作の直前には、 X と非特別ビーカー 2 個が残っている。この 2 個の非特別ビーカーはいずれも x 未満であるから、水量の少ない 2 個として選ばれるのはその 2 個であり、 X は選ばれない。したがって X は最後まで x リットルの水が入ったまま残る。

▶ 解法 2 (最初の反例を仮定する)

【方針】

特別なビーカー X が結論に反する最初の時刻を考える。(1) は最後の 3 個の総量、(2) は初めて非特別ビーカーの合併量が x 以上になる時刻を用いて矛盾を導く。

【解答】

最初に x リットル入っていたビーカーを X とする。

(1)

X が取り除かれず、水量も増えないまま最後まで残ると仮定する。最後の操作直前の他の 2 個の水量を y, z とすると

$$y + z = 1 - x > 2x.$$

したがって y, z の少なくとも一方は x より大きく、 X は 3 個のうち少ない方の 2 個に必ず入る。最後の操作で X が (a) に選ばれれば取り除かれ、(b) に選ばれれば水量が増える。いずれも仮定に反する。

(2)

X 以外の 2 個を合併して初めて水量が x 以上になる操作が存在すると仮定する。その直前、選ばれる 2 個を $y \leq z$ とする。まだ非特別ビーカーは 3 個以上あるから、別の 1 個の水量は z 以上である。 $y + z \geq x$ なら

$$1 - x \geq y + 2z \geq (y + z) + \frac{y + z}{2} \geq \frac{3x}{2}.$$

これは $x \leq 2/5$ を意味し、仮定 $x > 2/5$ に反する。

よって非特別ビーカー同士の合併後の水量は、最後まで x 未満である。したがって非特別ビーカーが 2 個になるまで X は最小 2 個に入らず、最後の操作でもその 2 個だけが選ばれる。ゆえに X は水量 x のまま最後まで残る。

【総評】 難度 8、計算量 5。操作自体は単純だが、「最小 2 個を合併する」という過程を最後の 3 個、または非特別ビーカー全体の不変量から見る必要がある。(1) は最後の操作直前だけを見ればよく、 $1 - x > 2x$ が核心である。(2) は非特別ビーカーの最小 2 個の和が x 未満に保たれることを示すのが最重要で、 $y + z \geq x$ と仮定したときに $1 - x \geq 3x/2$ へ持ち込む。選び方に同数の曖昧さがあっても結論が変わらないよう、 X が選ばれるか選ばれないかを明確に書き分けたい。目安は 25 分程度。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、等号条件、範囲を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 6 問】

コインを投げる試行の結果によって、数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合： 点 A の座標が点 B の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは、 A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合： 点 B の座標が点 A の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは、 B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし、上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果、 A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

- (1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち、 $a = b$ となる場合の数を X_n とおく。 X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。
- (2) X_n を求めよ。
- (3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1)(2) は文科第 3 問と同じく差 $d = a - b$ を追う。 $d = 0$ からは次に等しくならず、 $d \neq 0$ からは 2 通りのうち 1 通りだけ等しくなるので $X_{n+1} = 2^n - X_n$ が得られる。(3) は対称性から a の平均が $a + b$ の平均の半分であることを使う。 j 回後に $d = 0$ である割合を $X_j/2^j$ とし、次の 1 回での $a + b$ の平均増加量を足し上げる。

【解答】

(1) $d = a - b$ とおく。初めは $d = 0$ である。 $d = 0$ のとき、表なら A だけが 1 進むので $d = 1$ 、裏なら B だけが 1 進むので $d = -1$ となる。したがって $d = 0$ から次に $d = 0$ になることはない。 $d = 1$ のときは、表なら A, B がともに 1 進んで $d = 1$ のままであり、裏なら B だけが 1 進んで $d = 0$ となる。 $d = -1$ のときも同様に、2 通りのうち 1 通りだけが $d = 0$ へ戻る。

よって、 n 回後に $d \neq 0$ である $2^n - X_n$ 通りから、それぞれ 1 通りずつ $n + 1$ 回後に $d = 0$ となる。したがって $X_{n+1} = 2^n - X_n$ である。

(2) $X_1 = 0$ である。(1) の漸化式に対し、 $Y_n = X_n - \frac{2^n}{3}$ とおくと $Y_{n+1} = -Y_n$ である。また $Y_1 = -\frac{2}{3}$ だから $Y_n = \frac{2(-1)^n}{3}$ である。したがって $X_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ である。

(3) n 回後の $a + b$ の平均を E_n とする。規則は A と B 、表と裏を入れ替えても対称なので、 a の平均と b の平均は等しい。したがって求める a の平均は $\frac{E_n}{2}$ である。 j 回後に $d = 0$ である割合は $X_j/2^j$ である。ただし $j = 0$ ではまだ何も投げていないので $X_0 = 1$ とおく。この値は $X_0 = \frac{2^0 + 2(-1)^0}{3} = 1$ であり、(2) の式と一致している。

次の 1 回で $a + b$ がどれだけ増えるかを調べる。 $d = 0$ のときは、表でも裏でも片方だけが 1 進むので、 $a + b$ の増加量は 1 である。 $d \neq 0$ のときは、2 通りのうち一方では 2 点がともに 1 進んで増加量 2、もう一方では片方だけが 1 進んで増加量 1 である。したがって平均増加量は $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ である。

よって j 回後から $j + 1$ 回後への $a + b$ の平均増加量は

$$1 \cdot \frac{X_j}{2^j} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{X_j}{2^j} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{X_j}{2^j}$$

である。したがって

$$E_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{X_j}{2^j} \right\}$$

となる。

(2) より $\frac{X_j}{2^j} = \frac{1}{3} + \frac{2(-1)^j}{3 \cdot 2^j}$ であるから

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{(-1)^j}{3 \cdot 2^j} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \right\} \\ &= \frac{4n}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4n}{3} - \frac{2}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}. \end{aligned}$$

したがって a の平均は $\frac{E_n}{2} = \frac{2n}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$ である。すなわち $\frac{6n-1}{9} + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$ である。

▶ 解法 2 (3 状態の増分を直接平均する)

【方針】

差 $d = a - b$ の 3 状態で場合の数を数え、偶数番・奇数番に分けて X_n を求める。(3) は各状態における a の 1 回の増加量を直接平均して総和する。

【解答】

(1)

$d = a - b$ は $-1, 0, 1$ のいずれかである。 $d = 0$ からは 0 へ戻らず、 $d = \pm 1$ からは表裏の一方だけで 0 へ戻るの

$$X_{n+1} = 2^n - X_n.$$

(2)

$$X_{n+2} = 2^n + X_n, \quad X_0 = 1, \quad X_1 = 0.$$

偶数番・奇数番を別々に足すと

$$X_{2m} = \frac{4^m + 2}{3}, \quad X_{2m+1} = \frac{2(4^m - 1)}{3}.$$

したがって

$$X_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

(3)

j 回後に $d = 0$ である確率を $p_j = X_j/2^j$ とする。対称性から $d = 1$ と $d = -1$ の確率はともに $(1 - p_j)/2$ である。

次の 1 回における a の平均増加量は、 $d = 0$ と $d = 1$ では $1/2$ 、 $d = -1$ では 1 である。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p_j + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-p_j}{2} + 1 \cdot \frac{1-p_j}{2} &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_j. \\ p_j &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \end{aligned}$$

を $j = 0, \dots, n-1$ について足すと、求める平均は

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_j \right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \right\} \\ &= \frac{6n-1}{9} + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 6。差 $d = a - b$ の 3 状態分類と、対称性による a の平均が $a + b$ の平均の半分になることが核心である。 $d = 0$ と $d \neq 0$ の増分、 $X_0 = 1$ を確認できる 2 解法を示した。