

入 学 試 験 問 題

数 学



東京大学 2002 年度 理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

実数全体で定義された関数 $f(x) = xe^{-x^3}$ を考える.

- (1) $f(x)$ の増減・凹凸を調べ $f(x)$ のグラフの概形を図示せよ.
- (2) 正の数 C に対して $y = f(x)$ と x 軸, および $x = C$ で囲まれた領域を D_1 とする. D_1 を x 軸のまわりに回転させてえられる立体の体積を $V_1(C)$ とおくと

$$\lim_{C \rightarrow \infty} V_1(C)$$

を求めよ.

- (3) $y = f(x)$ の $x \geq 0$ における最大値を M とするとき $y = f(x)$ と y 軸, および $y = M$ で囲まれた領域を D_2 とおく. D_2 を y 軸のまわりに回転させてえられる立体の体積 V_2 を求めよ.

第 2 問

xyz 空間において次のような 3 つの互いに合同な長方形 L_1, L_2, L_3 を考える.

- L_1 は xy 平面に含まれ, $P_1(a, b, 0), Q_1(-a, b, 0), R_1(-a, -b, 0), S_1(a, -b, 0)$ を頂点とする.
- L_2 は yz 平面に含まれ, $P_2(0, a, b), Q_2(0, -a, b), R_2(0, -a, -b), S_2(0, a, -b)$ を頂点とする.
- L_3 は zx 平面に含まれ, $P_3(b, 0, a), Q_3(b, 0, -a), R_3(-b, 0, -a), S_3(-b, 0, a)$ を頂点とする.

ここで $a > b > 0$ とする. このとき次の問に答えよ.

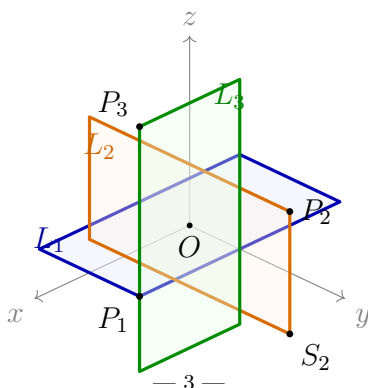
- (1) $\triangle P_1P_2P_3$ の面積, および $\triangle P_1P_2P_3$ と原点 O との距離を求めよ.
- (2) 四面体 $OP_1P_2P_3$ および四面体 $OP_1P_2S_2$ の体積をそれぞれ求めよ.
- (3) L_1, L_2, L_3 の 12 頂点から 3 点を選び三角形をつくる. このとき $\triangle P_1P_2P_3$ または $\triangle P_1P_2S_2$ と合同な三角形が 20 個えられる. これらの三角形で囲まれる二十面体を D とする.

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ なる θ に対して

$$a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta$$

とおくとき D の体積 V を $t = \tan \theta$ の関数 $V(t)$ として表せ.

- (4) $0 < t < 1$ において $V(t)$ は最大値をとることを示し, そのとき t の値を求めよ.



第 3 問

区間 $[0, 1]$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(x \leq \frac{1}{2} \right) \\ -2x + 2 & \left(x > \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

とおく. $0 \leq a_1 \leq 1$ を満たす実数 a_1 を初期値として数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で定める. このとき次の問に答えよ.

- (1) $f(b) = b$ を満たす, $0 \leq b \leq 1$ なる実数 b をすべて求めよ.
- (2) a_4 が (1) で求めた b の値の 1 つに等しくなるような初期値 a_1 をすべて求めよ.
- (3) 条件

「ある $n \geq 1$ に対して, a_n が (1) で求めた b の値の 1 つに等しくなる」

を満たす初期値 a_1 はどのような実数として表されるか.

- (4) 初期値 a_1 が (3) の条件を満たさないとき, $a_n \geq \frac{3}{4}$ となるような $n \geq 1$ が存在することを示せ.
- (5) 数列 $\{a_n\}$ が収束するために初期値 a_1 が満たすべき必要十分条件を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)