

入 学 試 験 問 題

数 学



東京大学 2003 年度 理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) $x \geq 0$ のとき、次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

(2) 曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考える。この立体を x 軸に垂直な $2n - 1$ 個の平面によって体積が等しい $2n$ 個の部分に分割する。ただし n は 2 以上の自然数である。

(a) これら $2n - 1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち、 $\frac{\pi}{2}$ より小さくかつ $\frac{\pi}{2}$ に最も近いものを a_n とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right)$$

を求めよ。

(b) $2n - 1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち最も小さいものを b_n とする。数列 $\{n^p b_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 でない有限な値に収束するような実数 p の値を求めよ。また、 p をそのようにとったとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p b_n$$

を求めよ。

第 2 問

p, q, N, M を自然数とする。ただし $\sqrt{p}$ は自然数ではないとする。このとき次の問に答えよ。

- (1) 自然数 l に対してある整数 A, B があって $(\sqrt{p} - [\sqrt{p}])^l = A\sqrt{p} + B$ と表せることを示せ。
ただし $[\sqrt{p}]$ は $\sqrt{p}$ より小さい整数のうちで最大のものを表す。
- (2) xy 平面において、 x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。このとき、直線 $y = \sqrt{p}x$ との距離が $\frac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ。
- (3) 双曲線 $y^2 - px^2 = q$ の上の点 P と格子点 Q で、線分 PQ の長さが $\frac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ。
- (4) $p = 5, q = 2, M = 100$ として (3) の条件を満たすような格子点 Q を一つ求めよ。すなわち、格子点 Q であって、双曲線 $y^2 - 5x^2 = 2$ の上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\frac{1}{100}$ 以下にすることができるようなものを一つ求めよ。ただし $2.23606 < \sqrt{5} < 2.23607$ を用いてよい。

第 3 問

- (1) すべての n について $a_n \geq 2$ であるような数列 $\{a_n\}$ が与えられたとして数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式

$$(A) \quad x_{n+2} - a_{n+1}x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える。このとき、自然数 m を一つ決めて固定すれば、漸化式 (A) を満たし、 $x_0 = 0$, $x_m = 1$ であるような数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在することを示せ。また、この数列について $0 < x_n < 1$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$) が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

- (2) 数列 $\{a_n\}$ と正の定数 b が与えられ、すべての n について $a_n \geq 1 + b$ が成り立つと仮定して、数列 $\{y_n\}$ に関する漸化式

$$(B) \quad y_{n+2} - a_{n+1}y_{n+1} + by_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える。このとき、自然数 m を一つ決めて固定すれば、漸化式 (B) を満たし、 $y_0 = 0$, $y_m = 1$ であるような数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在して $0 < y_n < 1$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$) が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

- (3) c を 2 より大きな定数として、すべての n について $a_n \geq c$ が成り立つと仮定する。このとき、 c から決まる m によらない正の定数 r で $r < 1$ を満たすものが存在し、(1) で得られた数列 $\{x_n\}$ は $x_n < r^{m-n}$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$) を満たすことを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)