

東京大学 2003 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

(1) $x \geq 0$ のとき、次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

(2) 曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考える。この立体を x 軸に垂直な $2n - 1$ 個の平面によって体積が等しい $2n$ 個の部分に分割する。ただし n は 2 以上の自然数である。

(a) これら $2n - 1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち、 $\frac{\pi}{2}$ より小さくかつ $\frac{\pi}{2}$ に最も近いものを a_n とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right)$$

を求めよ。

(b) $2n - 1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち最も小さいものを b_n とする。数列 $\{n^p b_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 でない有限な値に収束するような実数 p の値を求めよ。また、 p をそのようにとったとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p b_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は差を作り、下側は 3 階、上側は 5 階まで微分すると $1 - \cos x \geq 0$ になることを使う。(2) では回転体の体積要素が $\pi \sin^2 x dx$ である。中央直前は $\sin x \sim 1$ 、最初の切断は $\sin x \sim x$ を使って尺度を決める。

【解答】

(1)

$$F(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

とおくと $F'''(x) = 1 - \cos x \geq 0$ であり、 $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$ である。したがって順に積分して $F(x) \geq 0$ を得る。同様に

$$G(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$$

とおくと $G^{(5)}(x) = 1 - \cos x \geq 0$ で、 $G(0) = G'(0) = \dots = G^{(4)}(0) = 0$ である。よって $G(x) \geq 0$ であり、二つの不等式が示された。

(2)

(a) 回転体の全体積は

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

だから、一部分の体積は $\pi^2/(4n)$ である。対称性より $x = \pi/2$ も切断位置であり、 a_n との間が一部分だから

$$\pi \int_{a_n}^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4n}.$$

$h_n = \pi/2 - a_n$ とおくと

$$\int_0^{h_n} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4n}.$$

ここから $h_n \rightarrow 0$ であり、

$$h^{-1} \int_0^h \cos^2 t dt \rightarrow 1$$

なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n = \frac{\pi}{4}.$$

(2)(b) 最初の一部について

$$\int_0^{b_n} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4n}.$$

(1) から $\sin x/x \rightarrow 1$ であるから

$$\frac{1}{b^3} \int_0^b \sin^2 x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{\sin(bt)}{bt} \right)^2 t^2 \, dt \rightarrow \frac{1}{3}.$$

したがって

$$b_n^3 \sim \frac{3\pi}{4n}.$$

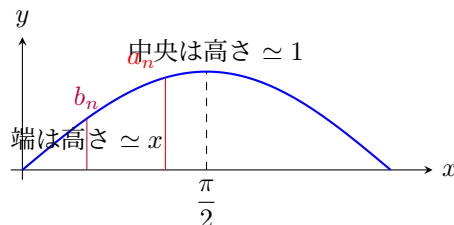
よって $n^p b_n$ が 0 でない有限値に収束するのは

$$p = \frac{1}{3}$$

のときだけで、その極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/3} b_n = \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{1/3}$$

である。



▶ 解法 2 (正確な積分式から尺度を読む)

【方針】

(1) は差の導関数の符号を 0 から順に戻して証明する。(2) では

$$\int \sin^2 x \, dx$$

の正確な式を使い、中央では h の 1 次項、端では b の 3 次項が最初に残ることを示す。

【解答】

(1)

$$F(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

とおくと

$$F'''(x) = 1 - \cos x \geq 0, \quad F(0) = F'(0) = F''(0) = 0.$$

したがって F'', F', F は順に非負となり、

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$

同様に

$$G(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$$

とおけば

$$G^{(5)}(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

で、0 における 4 階までの導関数はすべて 0 である。よって $G(x) \geq 0$ 、すなわち

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

(2) 全体積は

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2},$$

したがって 1 部分の体積は $\pi^2/(4n)$ である。

(2)(a) $h_n = \pi/2 - a_n$ とおくと

$$\int_0^{h_n} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{4n}.$$

正確には

$$\int_0^h \cos^2 t \, dt = \frac{h}{2} + \frac{\sin 2h}{4}.$$

$\sin 2h/(2h) \rightarrow 1$ だから左辺を h で割った値は 1 に収束する。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) = \frac{\pi}{4}.$$

(2)(b)

$$\int_0^{b_n} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4n}$$

であり、

$$\int_0^b \sin^2 x \, dx = \frac{b}{2} - \frac{\sin 2b}{4}.$$

(1) の評価から $\sin x/x \rightarrow 1$ が従い、変数変換 $x = bu$ により

$$\frac{1}{b^3} \int_0^b \sin^2 x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{\sin(bu)}{bu} \right)^2 u^2 \, du \rightarrow \frac{1}{3}.$$

したがって

$$b_n^3 \sim \frac{3\pi}{4n}.$$

ゆえに 0 でない有限な極限をもつ指数は

$$p = \frac{1}{3}$$

だけであり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/3} b_n = \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{1/3}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 30 分程度。(2) では全体積から一片の体積を先に固定する。中央付近は幅の 1 乗、原点付近は $\sin^2 x \sim x^2$ の積分で幅の 3 乗になるため、二つの極限の尺度が異なる。誘導 (1) を近似の根拠に使う。

【第 2 問】

p, q, N, M を自然数とする。ただし $\sqrt{p}$ は自然数ではないとする。このとき次の問に答えよ。

- (1) 自然数 l に対してある整数 A, B があって $(\sqrt{p} - [\sqrt{p}])^l = A\sqrt{p} + B$ と表せることを示せ。ただし $[\sqrt{p}]$ は $\sqrt{p}$ より小さい整数のうちで最大のものを表す。
- (2) xy 平面において、 x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。このとき、直線 $y = \sqrt{p}x$ との距離が $\frac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ。
- (3) 双曲線 $y^2 - px^2 = q$ の上の点 P と格子点 Q で、線分 PQ の長さが $\frac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ。
- (4) $p = 5, q = 2, M = 100$ として (3) の条件を満たすような格子点 Q を一つ求めよ。すなわち、格子点 Q であって、双曲線 $y^2 - 5x^2 = 2$ の上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\frac{1}{100}$ 以下にすることができるようなものを一つ求めよ。ただし $2.23606 < \sqrt{5} < 2.23607$ を用いてよい。

▶ 解法 1
【方針】

$s = [\sqrt{p}], \alpha = \sqrt{p} - s$ とおく。(1) は掛け算による帰納法。(2) は共役な数 $\beta = -\sqrt{p} - s$ を使い、奇数乗で A を大きくしながら $A\sqrt{p} + B = \alpha^l$ を小さくする。(3) はその格子点と双曲線の同じ x 座標の点を比べる。

【解答】

(1) $s = [\sqrt{p}]$ とおく。 $l = 1$ では $A = 1, B = -s$ とすればよい。 $\alpha^l = A\sqrt{p} + B$ と表せたとすると

$$\alpha^{l+1} = (A\sqrt{p} + B)(\sqrt{p} - s) = (B - As)\sqrt{p} + (Ap - Bs),$$

右辺の二係数は整数である。よって帰納法により示された。

(2) $\alpha = \sqrt{p} - s, \beta = -\sqrt{p} - s$ とおくと $0 < \alpha < 1, |\beta| > 1$ である。(1) の係数は共役を取って

$$A_l = \frac{\alpha^l - \beta^l}{2\sqrt{p}}, \quad B_l = \frac{\alpha^l + \beta^l}{2}$$

と表せる。奇数 l を大きくすれば $A_l > 0, -B_l > 0, A_l \rightarrow \infty, \alpha^l \rightarrow 0$ である。したがって

$$A_l \geq N, \quad \alpha^l \leq \frac{\sqrt{p+1}}{N}$$

を同時に満たす奇数 l を取れる。格子点 $Q = (A_l, -B_l)$ と直線との距離は

$$\frac{|\sqrt{p}A_l + B_l|}{\sqrt{p+1}} = \frac{\alpha^l}{\sqrt{p+1}} \leq \frac{1}{N}.$$

またその x 座標は $A_l \geq N$ である。

(3)

$$\frac{\sqrt{p+1}}{N} + \frac{q}{2\sqrt{p}N} \leq \frac{1}{M}$$

となるように十分大きな自然数 N を取る。(2) の構成で得た第 1 象限の格子点を $Q = (X, Y)$ とすると

$$X \geq N, \quad |Y - \sqrt{p}X| \leq \frac{\sqrt{p+1}}{N}.$$

双曲線上の点

$$P = (X, \sqrt{pX^2 + q})$$

を取れば

$$\begin{aligned} PQ &= |\sqrt{pX^2 + q} - Y| \\ &\leq |\sqrt{p}X - Y| + \frac{q}{\sqrt{pX^2 + q} + \sqrt{p}X} \\ &\leq \frac{\sqrt{p+1}}{N} + \frac{q}{2\sqrt{p}N} \leq \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

よって所要の点が存在する。

(4) 格子点

$$Q = (305, 682)$$

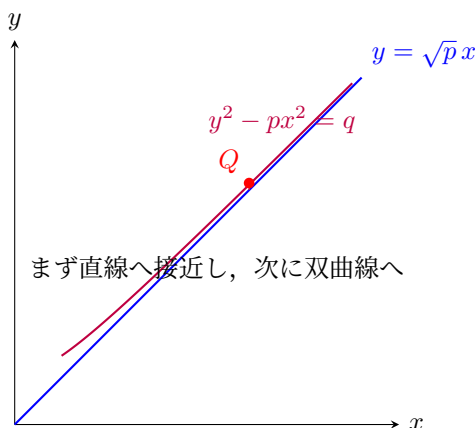
を取る。 $P = (305, \sqrt{465127})$ とすれば

$$(\sqrt{465127})^2 - 5 \cdot 305^2 = 2$$

なので P は双曲線上にある。また $682^2 = 465124$ だから

$$PQ = \sqrt{465127} - 682 = \frac{3}{\sqrt{465127} + 682} < \frac{3}{1364} < \frac{1}{100}.$$

したがってこの Q が一例である。



▶ 解法 2 (二項展開と鳩の巣原理)

【方針】

(1) は二項展開で $\sqrt{p}$ の偶数幂と奇数幂を分離する。(2) は $\sqrt{p}, 2\sqrt{p}, \dots$ の小数部分を鳩の巣原理で近づけ、必要ならその近似を整数倍して x 座標を大きくする。(3) は直線上の対応点を経由して双曲線までの距離を評価する。

【解答】

(1) $s = [\sqrt{p}]$ とする。二項展開

$$(\sqrt{p} - s)^l = \sum_{k=0}^l C_{l,k} (\sqrt{p})^k (-s)^{l-k}$$

で、 k が偶数の項は整数、奇数の項は整数と $\sqrt{p}$ の積である。したがって整数 A, B を用いて

$$(\sqrt{p} - s)^l = A\sqrt{p} + B$$

と表せる。

(2)

$$K \geq N^2 \sqrt{p+1}$$

となる自然数 K を取る。

$$0, \{\sqrt{p}\}, \{2\sqrt{p}\}, \dots, \{K\sqrt{p}\}$$

を長さ $1/K$ の K 個の区間に分ける。鳩の巣原理により、ある $1 \leq d \leq K$ と整数 e が存在して

$$|d\sqrt{p} - e| \leq \frac{1}{K}$$

となる。 $\sqrt{p}$ は無理数なので左辺は 0 ではない。

$$L = \left\lceil \frac{N}{d} \right\rceil$$

とする。 $1 \leq d$ より $L \leq N$ だから

$$\frac{L}{K} \leq \frac{1}{N\sqrt{p+1}}.$$

格子点 $Q = (Ld, Le)$ は x 座標が N 以上であり、直線 $y = \sqrt{p}x$ までの距離は

$$\frac{L|d\sqrt{p} - e|}{\sqrt{p+1}} \leq \frac{1}{N}.$$

(3) (2) を、直線までの縦方向の誤差が

$$|Y - \sqrt{p}X| \leq \frac{\sqrt{p+1}}{N}$$

となる格子点 $Q = (X, Y)$ に適用する。 N を

$$\frac{\sqrt{p+1}}{N} + \frac{q}{2\sqrt{p}N} \leq \frac{1}{M}$$

となるほど大きく取る。双曲線上の点

$$P = (X, \sqrt{pX^2 + q})$$

に対して

$$\begin{aligned} PQ &\leq |\sqrt{p}X - Y| + \sqrt{pX^2 + q} - \sqrt{p}X \\ &\leq \frac{\sqrt{p+1}}{N} + \frac{q}{2\sqrt{p}X} \leq \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

(4)

$$Q = (305, 682)$$

と取る。 $5 \cdot 305^2 + 2 = 465127$ だから

$$P = (305, \sqrt{465127})$$

は双曲線上にある。また $682^2 = 465124$ より

$$PQ = \sqrt{465127} - 682 = \frac{3}{\sqrt{465127} + 682} < \frac{3}{1364} < \frac{1}{100}.$$

したがってこの Q が条件を満たす。

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 35 分程度。(2) は小さい数 α^l と大きい共役 $|\beta|^l$ を同時に使い、格子点の横座標を大きくする。(3) では直線への垂直距離を縦方向の誤差へ $\sqrt{p+1}$ 倍して直す点に注意する。(4) は平方差で距離を評価する。

【第 3 問】

(1) すべての n について $a_n \geq 2$ であるような数列 $\{a_n\}$ が与えられたとして数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式

$$(A) \quad x_{n+2} - a_{n+1}x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える。このとき、自然数 m を一つ決めて固定すれば、漸化式 (A) を満たし、 $x_0 = 0$ 、 $x_m = 1$ であるような数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在することを示せ。また、この数列について $0 < x_n < 1$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$) が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

(2) 数列 $\{a_n\}$ と正の定数 b が与えられ、すべての n について $a_n \geq 1 + b$ が成り立つと仮定して、数列 $\{y_n\}$ に関する漸化式

$$(B) \quad y_{n+2} - a_{n+1}y_{n+1} + by_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える。このとき、自然数 m を一つ決めて固定すれば、漸化式 (B) を満たし、 $y_0 = 0$ 、 $y_m = 1$ であるような数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在して $0 < y_n < 1$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$) が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

(3) c を 2 より大きな定数として、すべての n について $a_n \geq c$ が成り立つと仮定する。このとき、 c から決まる m によらない正の定数 r で $r < 1$ を満たすものが存在し、(1) で得られた数列 $\{x_n\}$ は $x_n < r^{m-n}$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$) を満たすことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

境界値問題を直接逆向きに解かず、初期値 $u_0 = 0, u_1 = 1$ の基本数列を作る。係数条件から基本数列が正で狭義増加するため、 u_n/u_m が求める唯一の解になる。(3) は隣接項比を、方程式 $\lambda^2 - c\lambda + 1 = 0$ の大きい根で下から評価する。

【解答】

(1) $u_0 = 0, u_1 = 1$ とし

$$u_{n+1} = a_n u_n - u_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

で定める。 $u_2 = a_1 \geq 2 > u_1$ である。 $u_n > u_{n-1} > 0$ なら

$$u_{n+1} \geq 2u_n - u_{n-1} > u_n,$$

だから帰納法により $0 < u_1 < u_2 < \dots$ である。

元の漸化式を満たし $x_0 = 0$ である数列は、 x_1 を決めれば一意に定まり、線形性から $x_n = x_1 u_n$ である。したがって $x_m = 1$ とするには

$$x_n = \frac{u_n}{u_m}$$

とするほかない。これで存在と一意性が示され、狭義増加性から $0 < x_n < 1$ ($1 \leq n < m$) も従う。

(2) $v_0 = 0, v_1 = 1$ とし

$$v_{n+1} = a_n v_n - b v_{n-1}$$

で定める。 $v_2 = a_1 \geq 1 + b > 1$ であり、 $v_n > v_{n-1} > 0$ なら

$$\begin{aligned} v_{n+1} &\geq (1+b)v_n - b v_{n-1} \\ &= v_n + b(v_n - v_{n-1}) > v_n. \end{aligned}$$

よって v_n も正で狭義増加する。(1) と同様に

$$y_n = \frac{v_n}{v_m}$$

が条件を満たす唯一の数列で、 $0 < y_n < 1$ ($1 \leq n < m$) である。

(3)

$$\lambda = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4}}{2} > 1, \quad r = \lambda^{-1} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

とおくと $0 < r < 1$ である。(1) の基本数列に対し $R_n = u_n/u_{n-1}$ ($n \geq 2$) とおく。 $R_2 = a_1 \geq c > \lambda$ である。 $R_n > \lambda$ なら

$$R_{n+1} = a_n - \frac{1}{R_n} \geq c - \frac{1}{R_n} > c - \frac{1}{\lambda} = \lambda.$$

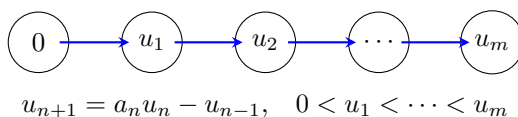
したがってすべての $n \geq 2$ で $R_n > \lambda$ である。よって $1 \leq n < m$ に対し

$$\frac{u_m}{u_n} = R_{n+1} R_{n+2} \cdots R_m > \lambda^{m-n}.$$

(1) の $x_n = u_n/u_m$ を用いると

$$x_n < \lambda^{-(m-n)} = r^{m-n}.$$

この r は c だけで決まり、 m には依存しない。



▶ 解法 2 (離散最大値原理と比較数列)

【方針】

境界値問題を連立 1 次方程式と見て、係数行列の正定値性から存在・一意性を示す。区間内部の最小点を調べる離散最大値原理で $0 < x_n < 1$ を得る。(3) では r^{m-n} を上側の比較数列として同じ原理を使う。

【解答】

(1) 未知数 $x_1, \dots, x_{m-1}$ の方程式は

$$a_k x_k - x_{k-1} - x_{k+1} = 0 \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

である。 $x_0 = 0, x_m = 1$ とする。係数行列の 2 次形式は

$$\sum_{k=0}^{m-1} (z_{k+1} - z_k)^2 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - 2) z_k^2$$

であり、 $z \neq 0$ なら正だから、解はただ 1 つ存在する。

内部に負の最小値があれば

$$a_k x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$$

と $a_k \geq 2$ により最小値が両隣へ伝わり、境界値に反する。同じ議論で内部では $x_k > 0$ である。

$w_k = 1 - x_k$ とおくと

$$a_k w_k - w_{k-1} - w_{k+1} = a_k - 2 \geq 0, \quad w_0 = 1, \quad w_m = 0.$$

同じ最小値原理で $w_k > 0$ だから

$$0 < x_k < 1 \quad (1 \leq k < m).$$

(2) $y_k = b^{k/2} z_k$ と置くと、係数行列は隣接成分 $-\sqrt{b}$ の対称行列に相似で、その 2 次形式は

$$\sqrt{b} \sum_{k=0}^{m-1} (z_{k+1} - z_k)^2 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - 2\sqrt{b}) z_k^2 > 0 \quad (z \neq 0)$$

である。ここで $a_k \geq 1 + b \geq 2\sqrt{b}$ を用いた。よって解はただ 1 つ存在する。

負の最小値に対し

$$a_k y_k = y_{k+1} + b y_{k-1}$$

を使えば、 $a_k \geq 1 + b$ により境界まで同じ値が伝わって矛盾する。 $1 - y_k$ にも同じ議論を適用して

$$0 < y_k < 1 \quad (1 \leq k < m).$$

(3)

$$r = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}, \quad \phi_k = r^{m-k}$$

とおく。 $0 < r < 1, r + r^{-1} = c$ だから

$$a_k \phi_k - \phi_{k-1} - \phi_{k+1} = \phi_k (a_k - r - r^{-1}) \geq 0.$$

$w_k = \phi_k - x_k$ は $w_0 = r^m > 0, w_m = 0$ を満たし、離散最大値原理により内部で $w_k > 0$ となる。ゆえに

$$x_k < r^{m-k} \quad (1 \leq k < m).$$

r は c だけで決まり、 m には依存しない。

【総評】 境界値問題を初期値 1 の基本数列で解く方法と、離散最大値原理で解く方法を収録した。(3) では特性根による比の評価、または r^{m-n} との比較が核心である。添字と不等号の向きを最後に確認したい。