

東京大学 2004 年度 文系

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

【方針】

放物線上の 2 点を $P = (u, u^2), Q = (v, v^2)$ と置く。直線 PQ の傾きは $(v^2 - u^2)/(v - u) = u + v$ なので、条件から $u + v = \sqrt{2}$ が決まる。あとは $d = v - u$ を用いて中点と辺 PQ の方向を表し、正三角形の第 3 頂点を「中点から PQ に垂直な方向へ $\sqrt{3}/2$ 倍進む点」として座標化する。その点が再び $y = x^2$ 上にある条件から $|d|$ を求め、最後に $a = |PQ| = \sqrt{3}|d|$ を出す。

【解答】

$P = (u, u^2), Q = (v, v^2)$ とおく。 $P \neq Q$ であるから $u \neq v$ であり、直線 PQ の傾きは $\frac{v^2 - u^2}{v - u} = u + v$ である。これが $\sqrt{2}$ に等しいので、 $u + v = \sqrt{2}$ である。 $d = v - u$ とおく。このとき $\overrightarrow{PQ} = (v - u, v^2 - u^2) = (d, \sqrt{2}d)$ であり、辺 PQ の長さは $|PQ| = \sqrt{d^2 + 2d^2} = \sqrt{3}|d|$ である。また中点 M は $M = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u^2+v^2}{2}\right)$ である。ここで $u^2 + v^2 = \frac{(u+v)^2 + (v-u)^2}{2} = \frac{2 + d^2}{2}$ だから、 $M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2 + d^2}{4}\right)$ である。

正三角形の第 3 頂点 R は、中点 M から $\overrightarrow{PQ}$ に垂直な向きへ $\frac{\sqrt{3}}{2}|PQ|$ だけ進んだ点である。向きを $\varepsilon = 1$ または -1 で表すと、

$$R = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{6}}{2}d, \frac{2 + d^2}{4} + \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}d\right)$$

と書ける。

この点も放物線 $y = x^2$ 上にあるので、

$$\frac{2 + d^2}{4} + \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{6}}{2}d\right)^2$$

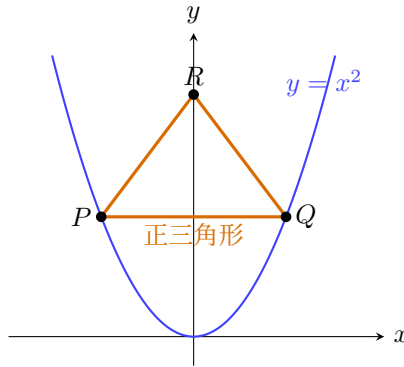
が成り立つ。右辺を展開すると

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{6}}{2}d\right)^2 = \frac{1}{2} - \varepsilon \sqrt{3}d + \frac{3}{2}d^2$$

であるから、両辺を整理して $\frac{5}{4}d^2 - \frac{3}{2}\varepsilon\sqrt{3}d = 0$ すなわち $d(5d - 6\varepsilon\sqrt{3}) = 0$ を得る。 $P \neq Q$ より $d \neq 0$ だから、 $d = \frac{6\varepsilon\sqrt{3}}{5}$ である。したがって $|d| = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ であり、正三角形の一辺の長さは $a = |PQ| = \sqrt{3}|d| = \frac{18}{5}$ である。

条件・検算

傾きの分母が 0 でないことは正三角形の辺なので保証される。得られた $d \neq 0$ を戻すと第 3 頂点も放物線上にあり、辺長は向きの符号によらず $18/5$ となる。



【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18～22 分。傾き条件から $u+v=\sqrt{2}$ が一瞬で決まるため、残る自由度を $d=v-u$ だけに絞るのが入口である。正三角形の第 3 頂点は、辺の中点から垂直方向へ進む形で表すと符号の 2 通りも自然に処理できる。計算上の注意点は、中点の y 座標で u^2+v^2 を $(u+v)^2$ と取り違えないこと、また最後に必要なのは d ではなく $|d|$ であること。答案では $d=0$ が $P=Q$ で不適である点も明記したい。

【第 2 問】

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$y \geq x^2, \quad y \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値、最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず上下の放物線が交わる条件から、領域が存在する x の範囲を $-a \leq x \leq 2a$ と定める。固定した x に対して $x+y$ は y とともに増加するので、最大値は上側の放物線 $y = -2x^2 + 3ax + 6a^2$ 、最小値は下側の放物線 $y = x^2$ 上で調べればよい。どちらも閉区間上の 2 次関数の最大最小に帰着し、頂点が区間内に入るかどうかで $a = 1/5$, $a = 1/2$ を境に場合分けする。

【解答】

領域 D が存在するためには、同じ x に対して下側の値が上側の値以下でなければならない。したがって $x^2 \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2$ である。これを整理すると $3x^2 - 3ax - 6a^2 \leq 0$ すなわち $(x+a)(x-2a) \leq 0$ である。 $a > 0$ より、領域 D に現れる x の範囲は $-a \leq x \leq 2a$ である。 x を固定すると、 $x+y$ は y が大きいほど大きい。したがって最大値は上側の放物線 $y = -2x^2 + 3ax + 6a^2$ 上で調べればよい。このとき $x+y = -2x^2 + (3a+1)x + 6a^2$ である。この 2 次関数は上に凸で、軸は $x = \frac{3a+1}{4}$ である。軸が区間 $[-a, 2a]$ に入る条件を調べると、左端については $-a \leq \frac{3a+1}{4}$ が常に成り立ち、右端については $\frac{3a+1}{4} \leq 2a$ すなわち $a \geq \frac{1}{5}$ である。

したがって、 $0 < a < 1/5$ のときは区間内で軸が右にはみ出すので、最大値は右端 $x = 2a$ で生じる。このとき $x+y = 2a + (2a)^2 = 4a^2 + 2a$ である。 $a \geq 1/5$ のときは軸で最大となり、平方完成より

$$-2x^2 + (3a+1)x + 6a^2 = -2\left(x - \frac{3a+1}{4}\right)^2 + 6a^2 + \frac{(3a+1)^2}{8}$$

だから、最大値は $6a^2 + \frac{(3a+1)^2}{8}$ である。

次に最小値を求める。 $x+y$ は y について増加するので、最小値は下側の放物線 $y = x^2$ 上で調べればよい。このとき $x+y = x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ である。軸 $x = -1/2$ が区間 $[-a, 2a]$ に入る条件は $-a \leq -\frac{1}{2} \leq 2a$ であり、右側の不等式は常に成り立つので、条件は $a \geq \frac{1}{2}$ である。 $0 < a < 1/2$ のとき、軸 $-1/2$ は区間の左外にあるから、最小値は左端 $x = -a$ で生じる。このとき $x+y = (-a)^2 - a = a^2 - a$ である。 $a \geq 1/2$ のときは軸で最小となり、最小値は $-\frac{1}{4}$ である。

以上より、最大値は

$$\begin{cases} 4a^2 + 2a & \left(0 < a < \frac{1}{5}\right), \\ 6a^2 + \frac{(3a+1)^2}{8} & \left(a \geq \frac{1}{5}\right), \end{cases}$$

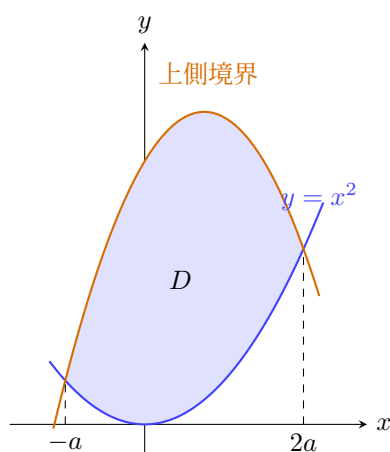
最小値は

$$\begin{cases} a^2 - a & \left(0 < a < \frac{1}{2}\right), \\ -\frac{1}{4} & \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

である。

条件・検算

境界値 $a = 1/5$ と $a = 1/2$ では、頂点と端点から得る値がそれぞれ一致する。したがって場合分けに隙間や重複はない。



▶ 解法 2 (直線の平行移動)

【方針】

直線 $x + y = c$ を平行移動し、領域に最後または最初に接する位置を調べる。最大値は上側放物線への接線または右端、最小値は下側放物線への接線または左端で決まり、接点が $[-a, 2a]$ に入る条件が場合分けの境界になる。

【解答】

直線 $x + y = c$ 、すなわち $y = -x + c$ を平行移動させると、 c が大きいほど直線は上へ動く。最大値はこの直線が領域 D に最後に触れるときの c であり、上側放物線に接するか、右端の交点 $(2a, 4a^2)$ を通るかのどちらかである。接点の x 座標は $(3a+1)/4$ であり、これが $[-a, 2a]$ に入る条件が $a \geq 1/5$ である。最小値も同様に、同じ直線を下へ動かして下側放物線 $y = x^2$ に接するか、左端の交点 $(-a, a^2)$ を通るかを見ればよく、接点 $x = -1/2$ が区間に入る条件が $a \geq 1/2$ である。これにより上と同じ場合分けと値が得られる。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 22～28 分。線形関数 $x + y$ の最大最小だが、固定した x では y について単調であるため、上下どちらの境界を見ればよいかが最初の判断になる。最大値と最小値で見る放物線が違い、さらに場合分けの境目も $a = 1/5$ と $a = 1/2$ で異なる。よくある誤りは、領域の x 範囲 $[-a, 2a]$ を出さずに頂点だけで答えること、また端点で上下の放物線が交わるため $y = x^2$ でも上側でも同じ点になることを見落とすことである。直線 $x + y = c$ の平行移動として見る別解は、どの境界で極値が出るかを図形的に確認するのに有効である。

【第 3 問】

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x), \quad h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $g(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (3) $h(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

【方針】

$f(x) = x^3 - 3x$ の増減を最初に完全に分類する。極大値が 2、極小値が -2 なので、 $f(x) = a$ の実数解の個数は a と ± 2 の位置で決まる。(2) 以降は $g(x) = f(f(x))$, $h(x) = f(g(x))$ と見て、まず外側の $f(u) = 0$ を解き、その各解 u に対して内側の方程式が何個の実数解をもつかを足し上げる。 $-2 < a < 2$ のとき、3つの解がすべて $(-2, 2)$ に入ることを使うのが反復の要点である。

【解答】

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ である。したがって f は

$(-\infty, -1)$ で増加, $(-1, 1)$ で減少, $(1, \infty)$ で増加

する。また $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ であり、 $x = -1$ で極大値 2、 $x = 1$ で極小値 -2 をとる。さらに $x \rightarrow \infty$ で $f(x) \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ で $f(x) \rightarrow -\infty$ である。

よって $f(x) = a$ を満たす実数 x の個数は

$$\begin{cases} 1 & (a < -2 \text{ または } 2 < a), \\ 2 & (a = -2 \text{ または } a = 2), \\ 3 & (-2 < a < 2) \end{cases}$$

である。

(2) $g(x) = f(f(x))$ である。 $g(x) = 0$ は $f(f(x)) = 0$ であるから、まず $f(u) = 0$ を解く。これは $u^3 - 3u = u(u^2 - 3) = 0$ より $u = -\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$ である。

これら 3つの値はいずれも $-2 < u < 2$ を満たす。したがって (1) より、それぞれの u に対して $f(x) = u$ は 3個の実数解をもつ。異なる u から得られる解集合は重ならないので、 $g(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は $3 \cdot 3 = 9$ である。

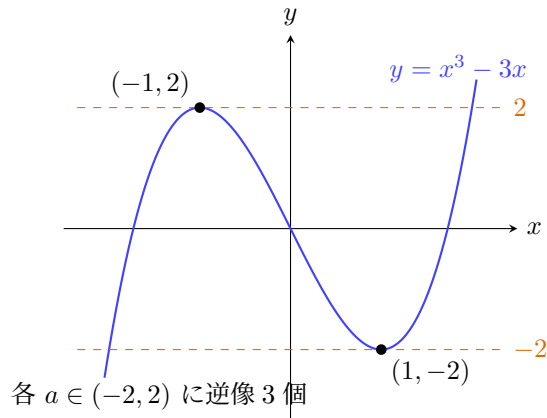
(3) $h(x) = f(g(x))$ であるから、 $h(x) = 0$ は $f(g(x)) = 0$ である。したがって $g(x) = -\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$ のいずれかが成り立てばよい。

ここで $-2 < a < 2$ を満たす任意の a について、 $g(x) = a$ の実数解の個数を調べる。 $g(x) = a$ は $f(f(x)) = a$ である。まず $f(u) = a$ は、(1) より 3個の実数解をもつ。さらに、 $-2 < a < 2$ のとき、その 3解はそれぞれ $-2 < u < -1$, $-1 < u < 1$, $1 < u < 2$ に 1個ずつ存在する。したがって、どの解 u についても $-2 < u < 2$ であり、再び (1) より $f(x) = u$ は 3個の実数解をもつ。

よって $-2 < a < 2$ のとき、 $g(x) = a$ は $3 \cdot 3 = 9$ 個の実数解をもつ。 $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ はすべてこの範囲に入るので、 $h(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は $3 \cdot 9 = 27$ である。

条件・検算

異なる中間値の逆像は互いに交わらない。また $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ はすべて $(-2, 2)$ に入り、各段で 3本の逆像が保たれる。



【総評】 難度 7、計算量 5。目安時間は 25～30 分。合成関数の式を展開すると次数が急に大きくなるため、展開せずに「外側の f の値が何であればよいか」を順に戻すのが本質である。(1) の増減表が後半の道具そのものなので、極大値 2、極小値 -2 、端での発散まで確認しておくことが重要になる。(2)(3) では、 $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ が $(-2, 2)$ に入るだけでなく、 $-2 < a < 2$ のときの 3 解がすべて $(-2, 2)$ に入ることを使っている。異なる中間値から得られる解は重ならないため、単純に個数を掛けてよい。

【第 4 問】

片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り、出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し、3, 4 であればまん中の板を裏返し、5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば、色の並び方は「黒黒黒」となる。

- (1) 「白白白」から始めて、3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。
- (2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。 p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

▶ 解法 1

【方針】

さいころの目は、実質的には 3 枚のうち 1 枚を等確率で選んで裏返す操作である。(1) は 3 回の選択列について、左端が奇数回、残り 2 枚が偶数回選ばれる場合を数える。(2) は奇数回後には黒い板の枚数が 1 枚または 3 枚に限られることを使い、2 回操作を 1 組として黒 1 枚状態へ戻る確率を数える。黒 1 枚状態全体の確率を置くと、黒 1 枚から黒 1 枚へ、黒 3 枚から黒 1 枚への 2 種類だけで漸化式が閉じる。最後に初期値 $p_1 = 1$ から解く。

【解答】

(1)

1 回の操作では、左端・まん中・右端のいずれか 1 枚が、それぞれ確率 $1/3$ で選ばれて裏返ると考えればよい。3 回後に「黒白白」となるには、左端が奇数回、まん中と右端が偶数回選ばれる必要がある。

左端が 3 回選ばれる場合は 1 通りである。左端が 1 回だけ選ばれる場合は、左端を選ぶ回の位置が 3 通りあり、残り 2 回はまん中だけ、または右端だけにそろえる必要があるので $3 \cdot 2 = 6$ 通りである。したがって有利な操作列は $1 + 6 = 7$ 通りである。全操作列は 3^3 通りなので、求める確率は $\frac{7}{3^3} = \frac{7}{27}$ である。

(2)

奇数回の操作後には、黒い板の枚数は奇数である。3 枚しかないので、黒い板の枚数は 1 枚または 3 枚である。ここで、 $2k+1$ 回後に黒い板が 1 枚である確率を p_{2k+1} とする。これは問題文の「黒白白」「白黒白」「白白黒」のいずれかである確率に等しい。

黒い板が 1 枚の状態から 2 回操作した後を考える。2 回とも同じ板を選べば元の状態に戻るなので、これは 3 通りである。また、黒い板 1 枚と白い板 1 枚を 1 回ずつ選ぶと、黒い板の位置が入れ替わり、やはり黒い板は 1 枚になる。この場合は、白い板の選び方が 2 通り、順序が 2 通りなので $2 \cdot 2 = 4$ 通りである。よって、黒 1 枚から 2 回後も黒 1 枚である確率は $\frac{3+4}{9} = \frac{7}{9}$ である。

一方、黒い板が 3 枚の状態から 2 回操作した後に黒い板が 1 枚になるには、異なる 2 枚を 1 回ずつ選べばよい。これは $3 \cdot 2 = 6$ 通りなので、その確率は $\frac{6}{9}$ である。

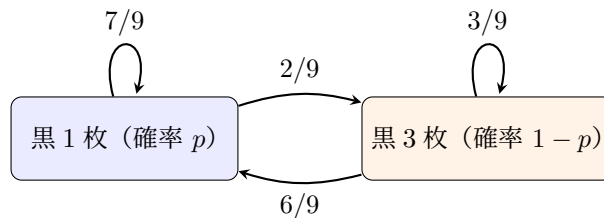
したがって

$$p_{2k+3} = \frac{7}{9}p_{2k+1} + \frac{6}{9}(1 - p_{2k+1}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}p_{2k+1}$$

である。また、1 回後は必ず黒い板が 1 枚なので $p_1 = 1$ である。定数 c を用いて $c = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}c$ を解くと $c = 3/4$ であるから、 $p_{2k+3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{9} \left(p_{2k+1} - \frac{3}{4} \right)$ となる。よって $p_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \right)^k$ である。問題では k は自然数なので、特に $k = 1, 2, \dots$ に対してこの式を用いればよい。

条件・検算

$k = 0$ を代入すると $p_1 = 1$ 、 $k = 1$ では $p_3 = 7/9$ となり、3 回後に黒 1 枚となる直接計数 21/27 と一致する。



2 回の操作を 1 単位として見る

▶ 解法 2 (偶奇抽出による直接計数)

【方針】

各板が選ばれた回数の偶奇だけに注目し、ちょうど 1 枚だけが奇数回選ばれる列を偶奇抽出で直接数える。3 枚の対称性を使って全有利列数を求める。

【解答】

(1)

3 回後に「黒白白」となるには、左端の板が奇数回、他の 2 枚が偶数回選ばれればよい。左端が 3 回選ばれる列が 1 通り、左端が 1 回で残り 2 回が同じ他の板となる列が

$$3 \cdot 2 = 6$$

通りある。したがって求める確率は

$$\frac{1+6}{3^3} = \frac{7}{27}$$

である。

(2)

$2k+1$ 回の操作後に黒い板がちょうど 1 枚であることは、3 枚のうちちょうど 1 枚が奇数回、残り 2 枚が偶数回選ばれることと同じである。特定の 1 枚だけが奇数回選ばれる操作列の数を N_k とする。

$n = 2k+1$ とおく。3 枚を選んだ回数をそれぞれ i, j, l とすると、操作列数は多項式 $(X + Y + Z)^n$ の係数で表せる。 i が奇数、 j, l が偶数である項だけを、 X, Y, Z へそれぞれ ± 1 を代入する 8 通りの符号和で抽出すると

$$\begin{aligned} N_k &= \frac{1}{8} \{ 3^n - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 3^n \} \\ &= \frac{3^{2k+1} + 1}{4}. \end{aligned}$$

どの 1 枚が奇数回選ばれるかは 3 通りあるので、

$$\begin{aligned} p_{2k+1} &= \frac{3N_k}{3^{2k+1}} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \right)^k. \end{aligned}$$

よって

$$p_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \right)^k$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 22～28 分。反転回数の偶奇だけで色が決まるため、各板が何回選ばれたかの偶奇を見るのが基本である。(1) は特定の配置「黒白白」だけを数えるが、(2) は黒 1 枚の 3 配置全体をまとめて数える点が違う。漸化式では、黒 1 枚状態から黒 1 枚へ戻る場合と、黒 3 枚状態から黒 1 枚へ移る場合を 2 回操作単位で数える。最後に固定値 $3/4$ を引いて等比型にする計算まで丁寧に書けば、式の形を覚えていなくても導ける。別解の直接カウントは検算に有効だが、偶奇を抽出する式の意味を説明せずに使うと答案としては弱くなる。