

入 学 試 験 問 題



数 学

東 京 大 学 2004 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

r は正の実数とし、角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。 xy 平面の原点 O を P_0 , $(1, 0)$ を P_1 とし、図示された向き (P_2 を上半平面にとる向き) に点 $P_2, P_3, \dots$ を、以下の条件 (a), (b), (c) が $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して満たされるようにとる。

- (a) $P_{n+1}P_{n+2} = rP_nP_{n+1}$
- (b) $\angle P_nP_{n+1}P_{n+2} = \theta$
- (c) 点 P_n, P_{n+2}, P_{n+3} は同一直線上にある。

このとき次の問いに答えよ。

- (1) r を θ を用いて表せ。
- (2) 点 P_n の座標を (x_n, y_n) とする。複素数 $z_n = x_n + y_n i$ を θ を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

であることを証明せよ。

以下 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

をそれぞれ θ の関数と考えて、 $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ とおく。

- (4) 極限值

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3} + 0} \alpha(\theta), \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3} + 0} \beta(\theta)$$

をそれぞれ求めよ。

- (5) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $\beta(\theta)$ の最大値を求めよ。

第 2 問

集合 A, B を

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{0, 1\}$$

とし、 N を 3 以上の整数とする。また、各項が 0 または 1 からなる数列を 01 数列と呼ぶことにする。

01 数列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ に対し、 A から B への写像 f を用いて、新しい 01 数列 $b_1, b_2, \dots, b_N$ を、

$$\begin{aligned} b_1 &= f(a_1), \\ b_2 &= f(2a_1 + a_2), \\ b_k &= f(4a_{k-2} + 2a_{k-1} + a_k) \quad (k = 3, 4, \dots, N) \end{aligned}$$

と定め、 $b_1, b_2, \dots, b_N$ は $a_1, a_2, \dots, a_N$ から f によって得られるという。ただし、 A から B への写像 f とは、 A の各要素 x に対して B の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする。

(1) A から B への写像は、全部で何通りあるか。

(2) $f(0) = f(3) = f(4) = f(7) = 0$, $f(1) = f(2) = f(5) = f(6) = 1$ であるとき、

$$b_k = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^k\} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

となるような 01 数列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ を求めよ。

(3) A から B への写像 f が、条件

$$(P) \quad f(2m) \neq f(2m+1) \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

を満たすとする。このような f は何通りあるか。

(4) A から B への写像 f が条件 (P) を満たすならば、どのような N 項からなる 01 数列も、ある 01 数列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ から f によって得られることを示せ。

第 3 問

xy 平面に点 $(-1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 A と、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 B をとる。円 A の内部を D 、円 B の内部を E とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $(-1 + \cos \theta, \sin \theta)$ における円 A の接線を l とする。円 B の接線 m が l と直交するとき、 l と m の交点 P の座標を θ を用いて表せ。
- (2) 領域 D にも E にも重ならないように 1 辺の長さが 2 の正方形を xy 平面内で動かすとき、この正方形が通りえない部分の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)