

東京大学 2004 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

r は正の実数とし、角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。 xy 平面の原点 O を P_0 , $(1, 0)$ を P_1 として、図示された向き (P_2 を上半平面にとる向き) に点 $P_2, P_3, \dots$ を、以下の条件 (a), (b), (c) が $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して満たされるようにとる。

- (a) $P_{n+1}P_{n+2} = rP_nP_{n+1}$
- (b) $\angle P_nP_{n+1}P_{n+2} = \theta$
- (c) 点 P_n, P_{n+2}, P_{n+3} は同一直線上にある。

このとき次の問いに答えよ。

- (1) r を θ を用いて表せ。
- (2) 点 P_n の座標を (x_n, y_n) とする。複素数 $z_n = x_n + y_n i$ を θ を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

であることを証明せよ。

以下 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

をそれぞれ θ の関数と考えて、 $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ とおく。

- (4) 極限值

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3} + 0} \alpha(\theta), \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3} + 0} \beta(\theta)$$

をそれぞれ求めよ。

- (5) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $\beta(\theta)$ の最大値を求めよ。

【方針】

辺を表す複素数を $w_n = z_{n+1} - z_n$ とおく。各辺は直前の辺を $\pi - \theta$ 回転して r 倍したものであるので、 w_n は等比数列になる。最初の一直線条件から r を決め、 z_n を等比数列の和で表す。収束は公比の絶対値で判定し、最後は極限の虚部を微分して最大化する。

【解答】

- (1) 図の向きでは、辺 $P_{n+1}P_{n+2}$ は辺 P_nP_{n+1} を反時計回りに $\pi - \theta$ 回転し、長さを r 倍したものである。特に

$$z_2 = 1 + re^{i(\pi-\theta)} = 1 - re^{-i\theta}, \quad z_3 - z_2 = r^2 e^{2i(\pi-\theta)} = r^2 e^{-2i\theta}.$$

P_0, P_2, P_3 が同一直線上にあるためには、 z_2 と $z_3 - z_2$ の偏角の差が 0 または π でなければならない。したがって

$$\operatorname{Im}\{e^{2i\theta}(1 - re^{-i\theta})\} = 0.$$

左辺は $\sin 2\theta - r \sin \theta$ だから、 $0 < \theta < \pi/2$ より

$$r = 2 \cos \theta.$$

この値なら同じ相似関係が以後も繰り返され、条件 (a)–(c) を満たす。

- (2) $w_n = z_{n+1} - z_n$ とおくと、 $w_0 = 1$ であり

$$w_{n+1} = re^{i(\pi-\theta)} w_n = -re^{-i\theta} w_n.$$

よって、 $q = -2 \cos \theta e^{-i\theta}$ とおけば

$$w_n = q^n, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (n \geq 1),$$

また $z_0 = 0$ である。すなわち

$$z_n = \frac{1 - (-2 \cos \theta e^{-i\theta})^n}{1 + 2 \cos \theta e^{-i\theta}}.$$

(3) $q \neq 1$ なので、上式より z_n が収束することと q^n が収束することは同値である。 $|q| < 1$ なら $q^n \rightarrow 0$ である。 $|q| > 1$ なら絶対値が発散する。 $|q| = 1$ で q^n が収束すると仮定すれば、

$$(q - 1)q^n = q^{n+1} - q^n \rightarrow 0$$

となるが、 $q \neq 1$, $|q^n| = 1$ に反する。したがって必要十分条件は

$$|q| = 2 \cos \theta < 1,$$

すなわち

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

である。複素数列 z_n の収束は実部列 x_n と虚部列 y_n がともに収束することと同値なので、主張が示された。

(4) 収束する範囲では

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta e^{-i\theta}}.$$

$c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ とおき分母を実数化すると

$$\alpha(\theta) = \frac{1 + 2c^2}{1 + 8c^2}, \quad \beta(\theta) = \frac{2cs}{1 + 8c^2}.$$

よって

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/3+0} \alpha(\theta) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/3+0} \beta(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(5) $u = \cos^2 \theta$ とおくと $0 < u < 1/4$ であり、

$$\beta(\theta)^2 = \frac{4u(1-u)}{(1+8u)^2}.$$

この右辺を u で微分すると、その符号は $1 - 10u$ の符号に一致する。したがって $u = 1/10$ で最大となり、

$$\beta(\theta)^2 = \frac{1}{9}.$$

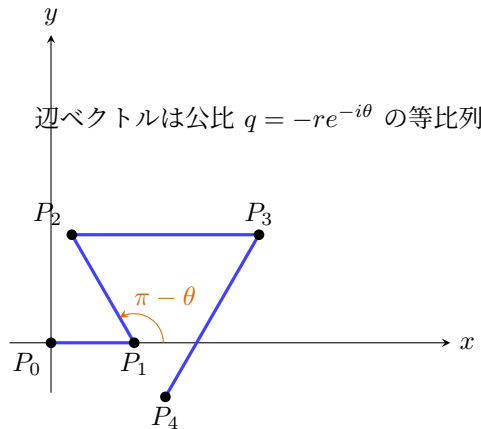
この範囲で $\beta(\theta) > 0$ だから、最大値は

$$\frac{1}{3}$$

である。

条件・検算

収束条件では端点 $\theta = \pi/3$ を含めない。最大点 $\cos^2 \theta = 1/10$ は $0 < \cos^2 \theta < 1/4$ の内部にあり、実際に達成される。



【総評】 難度 6、計算量 6。想定時間は 25 分程度。最初に辺ベクトルを複素数化できれば、一直線条件、一般項、収束判定が一つの公比でつながる。得点差がつくのは、 $|q| = 1$ を単に除外せず非収束を説明する点と、(5) で $u = \cos^2 \theta$ の範囲を明記する点である。なお原資料の角記号が三角形記号として取り込まれていたため、問題文では $\angle$ に訂正し、紙面図が担っていた P_2 の向きも文章で補った。

【第 2 問】

集合 A, B を

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{0, 1\}$$

とし、 N を 3 以上の整数とする。また、各項が 0 または 1 からなる数列を 01 数列と呼ぶことにする。

01 数列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ に対し、 A から B への写像 f を用いて、新しい 01 数列 $b_1, b_2, \dots, b_N$ を、

$$\begin{aligned} b_1 &= f(a_1), \\ b_2 &= f(2a_1 + a_2), \\ b_k &= f(4a_{k-2} + 2a_{k-1} + a_k) \quad (k = 3, 4, \dots, N) \end{aligned}$$

と定め、 $b_1, b_2, \dots, b_N$ は $a_1, a_2, \dots, a_N$ から f によって得られるという。ただし、 A から B への写像 f とは、 A の各要素 x に対して B の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする。

- (1) A から B への写像は、全部で何通りあるか。
- (2) $f(0) = f(3) = f(4) = f(7) = 0, f(1) = f(2) = f(5) = f(6) = 1$ であるとき、

$$b_k = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^k\} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

となるような 01 数列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ を求めよ。

- (3) A から B への写像 f が、条件

$$(P) \quad f(2m) \neq f(2m+1) \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

を満たすとする。このような f は何通りあるか。

- (4) A から B への写像 f が条件 (P) を満たすならば、どのような N 項からなる 01 数列も、ある 01 数列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ から f によって得られることを示せ。

【方針】

写像は 8 個の入力それぞれへの 0,1 の割当てとして数える。(2) では与えられた表が直前 2 項の排他的な違いを出力していることを読み取る。(4) では、過去の項を固定すると新しい項 a_k の二つの候補が必ず連続する偶数・奇数の組になることを使い、先頭から順に構成する。

【解答】

- (1) A の 8 個の各要素に対し、像は 0 または 1 の 2 通りから独立に選べる。したがって

$$2^8 = 256$$

通りである。

(2) 与えられた表を 2 進数の下 3 桁で見ると、入力 $4u + 2v + w$ に対して

$$f(4u + 2v + w) = \begin{cases} 0 & (v = w), \\ 1 & (v \neq w) \end{cases}$$

であり、最上位の u には依存しない。また $f(0) = 0, f(1) = 1$ である。目標の b_k は奇数番目で 0、偶数番目で 1 だから、 $a_1 = 0$ であり、 $k \geq 2$ では

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} & (k \text{ が奇数}), \\ 1 - a_{k-1} & (k \text{ が偶数}) \end{cases}$$

とすればよい。よって

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots),$$

すなわち

$$a_k = \begin{cases} 1 & (k \equiv 2, 3 \pmod{4}), \\ 0 & (k \equiv 0, 1 \pmod{4}) \end{cases}$$

である。

(3) 各組 $\{2m, 2m + 1\}$ では $f(2m)$ を 2 通りから選ぶと $f(2m + 1)$ はその反対に一意に決まる。4 組は独立なので

$$2^4 = 16$$

通りである。

(4) 任意の 01 数列 $b_1, \dots, b_N$ を固定する。まず $f(0) \neq f(1)$ だから、 $f(a_1) = b_1$ となる $a_1 \in \{0, 1\}$ がただ一つ存在する。 $a_1, \dots, a_{k-1}$ まで選べたとする。 $k = 2$ では入力候補は $2a_1$ と $2a_1 + 1$ 、 $k \geq 3$ では

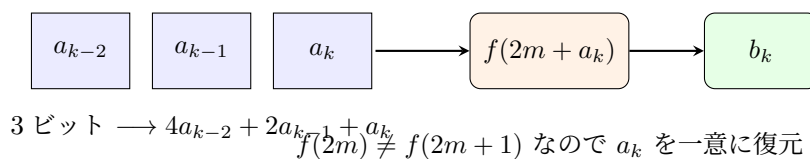
$$4a_{k-2} + 2a_{k-1}, \quad 4a_{k-2} + 2a_{k-1} + 1$$

である。いずれも $2m, 2m + 1$ という一組である。条件 (P) によりこの二つの f の値は 0 と 1 を一つずつ取るから、 b_k を得る方を a_k としてただ一つ選べる。

以上を $k = N$ まで繰り返せば、与えられた任意の $b_1, \dots, b_N$ を生む 01 数列 $a_1, \dots, a_N$ が構成できる。

条件・検算

各段階で候補入力は必ず $2m, 2m + 1$ の対になり、条件 (P) により出力 0 と 1 が 1 つずつ現れる。したがって構成は途中で止まらず、しかも一意である。



【総評】 難度 5、計算量 3。想定時間は 20 分程度。(2) の表を暗記的に追うより、下 2 桁が等しいか異なるかを出力する規則と見抜くと簡潔になる。(4) では存在だけでなく各段階で選択が一意であることまで書くと論証が締まる。

【第 3 問】

xy 平面に点 $(-1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 A と、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 B をとる。円 A の内部を D 、円 B の内部を E とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $(-1 + \cos \theta, \sin \theta)$ における円 A の接線を l とする。円 B の接線 m が l と直交するとき、 l と m の交点 P の座標を θ を用いて表せ。
- (2) 領域 D にも E にも重ならないように 1 辺の長さが 2 の正方形を xy 平面内で動かすとき、この正方形が通らない部分の面積を求めよ。

【方針】

(1) は接点の半径を法線ベクトルとして 2 本の接線を立式する。(2) では正方形の二つの隣接辺が二円に接するとき、二円の間にある頂点の軌跡が到達不能領域の境界になる。軌跡を θ で媒介し、上半分の余分な領域を積分で求めて対称性を使う。

【解答】

(1) $c = \cos \theta, s = \sin \theta$ とおく。円 A の接線 l は

$$c(x+1) + sy = 1, \quad cx + sy = 1 - c.$$

l と直交する直線は $sx - cy = a$ と書ける。これが中心 $(1, 0)$ 、半径 1 の円 B に接する条件は

$$|s - a| = 1,$$

したがって $a = s \pm 1$ である。連立方程式を解くと、複号同順で

$$P = (c \pm s - \cos 2\theta, s \mp c - \sin 2\theta).$$

(2) 正方形の隣り合う二辺を円 A, B にそれぞれ接するように置き、二円の間にある頂点を考える。(1) の二点のうちこの頂点は

$$P_1(\theta) = (\cos \theta - \sin \theta - \cos 2\theta, \sin \theta + \cos \theta - \sin 2\theta)$$

である。円 A との接点から P_1 までの符号付き距離は $2 \sin \theta - 1$ 、円 B との接点からの距離は $2 \cos \theta - 1$ となる。二つの接点が正方形の対応する辺上にある条件は

$$2 \sin \theta - 1 \geq 0, \quad 2 \cos \theta - 1 \geq 0,$$

すなわち

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

この範囲で P_1 が描く曲線が、上側の到達不能部分の境界になる。

$P_1 = (x(\theta), y(\theta))$ とおくと、 x は単調増加し、両端は

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

この曲線と x 軸に挟まれる面積を S_0 とすると

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} y(\theta) x'(\theta) d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sin \theta + \cos \theta - \sin 2\theta)(-\sin \theta - \cos \theta + 2 \sin 2\theta) d\theta \\ &= -\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{5\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

一方、同じ x の範囲で二円の上半円弧と x 軸に挟まれる部分は、中心角 $\pi/6$ の扇形から直角三角形を引いた部分が二つあるので

$$S_1 = 2 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

したがって、二円の外側にある上側の到達不能部分は

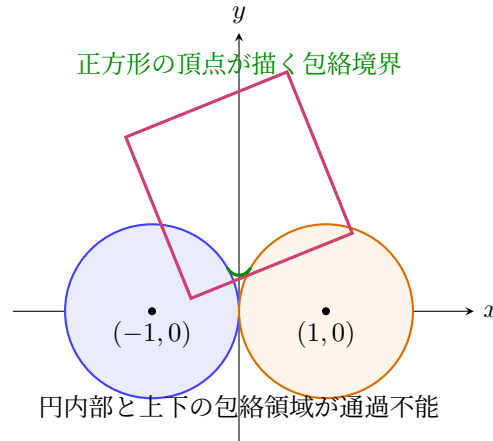
$$S_0 - S_1 = -\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

下側にも合同な部分があり、さらに円 D, E の内部そのものの面積が 2π である。よって求める面積は

$$2\pi + 2(S_0 - S_1) = \pi - 2 + 3\sqrt{3}.$$

条件・検算

選んだ枝では両接点が長さ 2 の辺上にある範囲がちょうど $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$ である。上下の追加領域は合同で、円内部 2 個分との重複もない。



【総評】 難度 8、計算量 8。想定時間は 35 分程度で、後回し候補の難問である。(1) の二つの交点のうち、二円の間にある枝を選び、接点が正方形の辺上にある条件から $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$ を出すところが核心である。面積は円内部 2π と、上下の追加部分を分けると重複を避けやすい。積分値は端点と正負を再確認した。