

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 2004 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

第 2 問

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し, 10 の位の数を a , 1 の位の数を b とおいたとき, $a + b$ が偶数となるならば, b は 0 または 4 であることを示せ。
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し, 1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数, および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば, その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

第 3 問

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を、円 C に内接させながら、円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が、円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は、円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

第 4 問

関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$f_1(x) = x^3 - 3x, \quad f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f_1(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (2) a を実数とする。 $f_2(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (3) n を 3 以上の自然数とする。 $f_n(x) = 0$ をみたす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

第 5 問

r を正の実数とする。 xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を A , 点 $P(r, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし, 球 A と球 B の和集合とは, 球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

- (1) V を r の関数として表し, そのグラフの概形をかけ。
- (2) $V = 8$ となるとき, r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

注意：円周率 π は $3.14 < \pi < 3.15$ をみたす。

第 6 問

片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返す。

さいころを振り、出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し、3, 4 であればまん中の板を裏返し、5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば、色の並び方は「黒白黒」となる。

- (1) 「白白白」から始めて、3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。
- (2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)