

東京大学 2004 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

【方針】

放物線上の 2 点を $P = (u, u^2), Q = (v, v^2)$ と置く。直線 PQ の傾きは $(v^2 - u^2)/(v - u) = u + v$ なので、条件から $u + v = \sqrt{2}$ が決まる。あとは $d = v - u$ を用いて中点と辺 PQ の方向を表し、正三角形の第 3 頂点を「中点から PQ に垂直な方向へ $\sqrt{3}/2$ 倍進む点」として座標化する。その点が再び $y = x^2$ 上にある条件から $|d|$ を求め、最後に $a = |PQ| = \sqrt{3}|d|$ を出す。

【解答】

$P = (u, u^2), Q = (v, v^2)$ とおく。 $P \neq Q$ であるから $u \neq v$ であり、直線 PQ の傾きは $\frac{v^2 - u^2}{v - u} = u + v$ である。これが $\sqrt{2}$ に等しいので、 $u + v = \sqrt{2}$ である。 $d = v - u$ とおく。このとき $\overrightarrow{PQ} = (v - u, v^2 - u^2) = (d, \sqrt{2}d)$ であり、辺 PQ の長さは $|PQ| = \sqrt{d^2 + 2d^2} = \sqrt{3}|d|$ である。また中点 M は $M = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u^2+v^2}{2}\right)$ である。ここで $u^2 + v^2 = \frac{(u+v)^2 + (v-u)^2}{2} = \frac{2 + d^2}{2}$ だから、 $M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2 + d^2}{4}\right)$ である。

正三角形の第 3 頂点 R は、中点 M から $\overrightarrow{PQ}$ に垂直な向きへ $\frac{\sqrt{3}}{2}|PQ|$ だけ進んだ点である。向きを $\varepsilon = 1$ または -1 で表すと、

$$R = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{6}}{2}d, \frac{2 + d^2}{4} + \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}d\right)$$

と書ける。

この点も放物線 $y = x^2$ 上にあるので、

$$\frac{2 + d^2}{4} + \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{6}}{2}d\right)^2$$

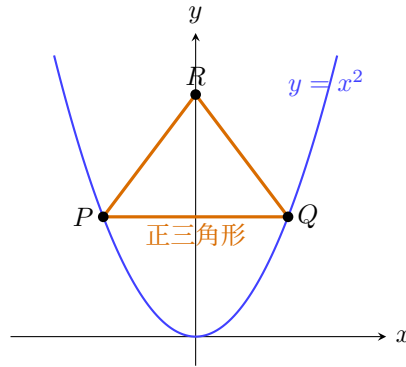
が成り立つ。右辺を展開すると

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{6}}{2}d\right)^2 = \frac{1}{2} - \varepsilon \sqrt{3}d + \frac{3}{2}d^2$$

であるから、両辺を整理して $\frac{5}{4}d^2 - \frac{3}{2}\varepsilon\sqrt{3}d = 0$ すなわち $d(5d - 6\varepsilon\sqrt{3}) = 0$ を得る。 $P \neq Q$ より $d \neq 0$ だから、 $d = \frac{6\varepsilon\sqrt{3}}{5}$ である。したがって $|d| = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ であり、正三角形の一辺の長さは $a = |PQ| = \sqrt{3}|d| = \frac{18}{5}$ である。

条件・検算

傾きの分母が 0 でないことは正三角形の辺なので保証される。得られた $d \neq 0$ を戻すと第 3 頂点も放物線上にあり、辺長は向きの符号によらず $18/5$ となる。



【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18～22 分。傾き条件から $u+v=\sqrt{2}$ が一瞬で決まるため、残る自由度を $d=v-u$ だけに絞るのが入口である。正三角形の第 3 頂点は、辺の中点から垂直方向へ進む形で表すと符号の 2 通りも自然に処理できる。計算上の注意点は、中点の y 座標で u^2+v^2 を $(u+v)^2$ と取り違えないこと、また最後に必要なのは d ではなく $|d|$ であること。答案では $d=0$ が $P=Q$ で不適である点も明記したい。

【第 2 問】

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し、10 の位の数 a 、1 の位の数 b とおいたとき、 $a+b$ が偶数となるならば、 b は 0 または 4 であることを示せ。
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し、1000 の位の数、100 の位の数、10 の位の数、および 1 の位の数 d の 4 つすべてが同じ数となるならば、その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

【方針】

(1) は平方数の下 2 桁だけの問題なので、20 で割った余りを見る。平方数の 20 での余りは 0, 1, 4, 5, 9, 16 に限られる。一方、 $a+b$ が偶数なら十の位 a と一の位 b は同じ偶奇であり、下 2 桁 $10a+b$ の 20 での余りを偶奇別に絞れる。(2) は下 4 桁を $dddd$ と置き、(1) で $d=0$ または 4 まで絞る。 $d=4$ は平方数の 16 での余りに反するので排除し、下 4 桁が 0000 であることを示す。

【解答】

(1)

任意の整数を 20 で割った余りは 0, 1, 2, ..., 19 のいずれかである。これらを 2 乗して 20 で割った余りを調べると、平方数の余りは 0, 1, 4, 5, 9, 16 のいずれかに限られる。

平方数の下 2 桁を $10a+b$ とする。 $a+b$ が偶数であるから、 a と b は同じ偶奇である。

まず a, b がともに奇数であるとする。このとき $10a$ は 20 で割ると 10 余り、 b は奇数であるから、 $10a+b$ を 20 で割った余りは 11, 13, 15, 17, 19 のいずれかである。しかし、これらは上で求めた平方数の余りに含まれない。したがってこの場合は起こらない。

次に a, b がともに偶数であるとする。このとき $10a$ は 20 で割り切れるので、 $10a+b$ を 20 で割った余りは 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかである。このうち平方数の余りになり得るのは 0, 4 だけである。したがって一の位 b は $b=0$ または $b=4$ である。

(2)

下 4 桁の数字がすべて同じであるとし、その数字を d とする。すると下 2 桁は dd であり、十の位と一の位の和は $d+d=2d$ で偶数である。よって (1) より $d=0$ または $d=4$ である。

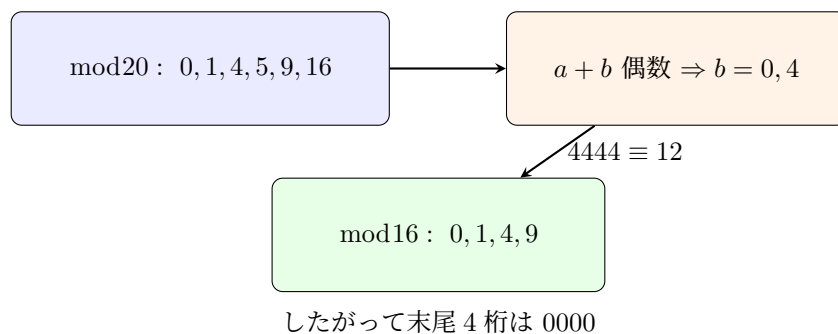
もし $d=4$ なら、下 4 桁は 4444 である。ところが $4444=16 \cdot 277 + 12$ であるから $4444 \equiv 12 \pmod{16}$ である。一方、整数を 16 で割った余りを 2 乗して調べると、平方数の 16 での余りは 0, 1, 4, 9 のいずれかであり、12 にはならない。したがって $d=4$ は不可能である。

よって $d=0$ でなければならない。つまり下 4 桁は 0000 である。したがって、その平方数は 10000 で割り切れる。

条件・検算

平方剰余は実際に $0, 1, 4, 5, 9, 16 \pmod{20}$ および $0, 1, 4, 9 \pmod{16}$ に限られる。末尾 4 桁が 0000 なら、元の数の桁数

にかかわらず 10000 の倍数である。



【総評】 難度 6、計算量 4。目安時間は 18～24 分。末尾の数字だけを問う平方数の問題なので、実際の平方根を考えるより剰余で処理するのが自然である。(1) では $a + b$ が偶数という条件を「十の位と一の位が同じ偶奇」と読み替え、20 での平方剰余と照合する。16 ではなく 20 を使うのは、十の位の偶奇と一の位を同時に扱いやすいためである。(2) は (1) をそのまま下 2 桁に適用し、残った $d = 4$ を 16 で排除する。よくある誤りは、下 2 桁が 44 であり得ないことを示して下 4 桁 4444 の確認を省くこと、または $d = 0$ から直ちに 10000 の倍数であることを言い忘れることである。

【第 3 問】

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を、円 C に内接させながら、円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が、円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は、円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

【方針】

円 C の中心を原点、最初の接点を $(10, 0)$ に取る。半径 3 の円板の中心は半径 7 の円を動くので $(7 \cos t, 7 \sin t)$ と置ける。内側を滑らずに転がる条件から、点 P の円板中心に対する向きは中心の回転に対して逆向きに $7t/3$ だけ回転する。これで P の媒介変数表示を作り、 $|OP| = 10$ となる最初の t を求める。面積は、曲線が原点に対して掃く面積

$$\frac{1}{2} \int (xy' - yx') dt$$

と、円 C の対応する扇形面積との差で求める。

【解答】

円 C の中心を原点 O とし、最初に点 P が $(10, 0)$ で円 C に接しているとする。円板 D の中心を S とすると、 S は半径 $10 - 3 = 7$ の円周上を動く。そこで $S = (7 \cos t, 7 \sin t)$ とおく。

円板が滑らずに内側を転がるので、中心 S が角 t だけ進む間に、円板は中心のまわりに逆向きに $\frac{7}{3}t$ だけ回転する。したがって点 P の座標は

$$\begin{cases} x = 7 \cos t + 3 \cos \frac{7t}{3}, \\ y = 7 \sin t - 3 \sin \frac{7t}{3} \end{cases}$$

と表される。

次に、点 P が再び円 C の円周に接する時刻を求める。上の式から

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 49 + 9 + 42 \left(\cos t \cos \frac{7t}{3} - \sin t \sin \frac{7t}{3} \right) \\ &= 58 + 42 \cos \frac{10t}{3} \end{aligned}$$

である。円 C の円周上にある条件は $x^2 + y^2 = 100$ であるから、 $58 + 42 \cos \frac{10t}{3} = 100$ すなわち $\cos \frac{10t}{3} = 1$ である。 $t > 0$ で最初にこれが成り立つのは $\frac{10t}{3} = 2\pi$ のときなので、 $t = \frac{3\pi}{5}$ である。

曲線と円 C の円弧で囲まれる小さい方の面積を求める。まず、点 P が描く曲線と原点 O を結ぶ線分が掃く面積は、微小な三角形の面積を足し合わせる考えから

$$\frac{1}{2} \int_0^{3\pi/5} (xy' - yx') dt$$

である。ここで上の媒介変数表示を微分して整理すると $xy' - yx' = 56 \sin^2 \frac{5t}{3}$ となる。よって曲線が掃く面積は

$$\frac{1}{2} \int_0^{3\pi/5} 56 \sin^2 \frac{5t}{3} dt = 28 \int_0^{3\pi/5} \sin^2 \frac{5t}{3} dt$$

である。 $u = \frac{5t}{3}$ とおくと、 $t = 0$ から $3\pi/5$ まで動くとき u は 0 から π まで動くので、

$$28 \int_0^{3\pi/5} \sin^2 \frac{5t}{3} dt = 28 \cdot \frac{3}{5} \int_0^\pi \sin^2 u du = 28 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{42\pi}{5}$$

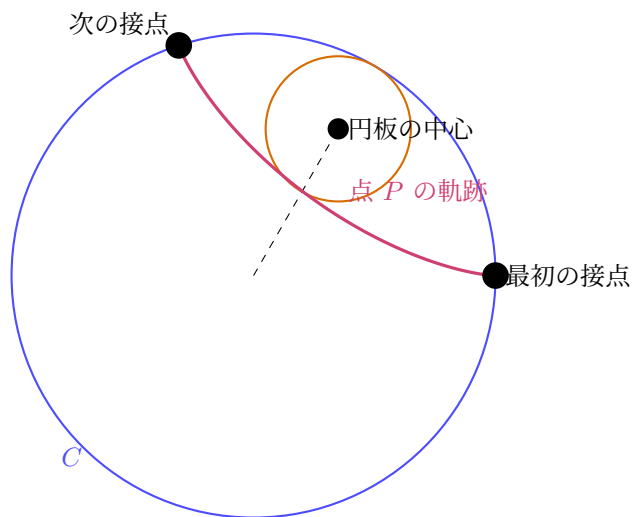
である。

一方、最初と次の接点を結ぶ円 C の弧に対応する扇形の中心角は $3\pi/5$ である。したがってその扇形の面積は $\frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{3\pi}{5} = 30\pi$ である。曲線はこの扇形の内部を通るので、曲線と円弧で囲まれる小さい方の面積は $30\pi - \frac{42\pi}{5} = \frac{108\pi}{5}$ である。

円 C 全体の面積は 100π であるから、もう一方の面積は $100\pi - \frac{108\pi}{5} = \frac{392\pi}{5}$ である。したがって求める 2 つの面積は $\frac{108\pi}{5}$, $\frac{392\pi}{5}$ である。

条件・検算

次の接触時刻 $t = 3\pi/5$ では始点と異なる円周上の点に到達する。二面積の和は $108\pi/5 + 392\pi/5 = 100\pi$ で円 C の面積と一致する。



【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 35～45 分。最大の山は、内側を滑らずに転がる円板上の点の媒介変数表示を正しく作ることである。中心は半径 7 の円を動き、点 P の相対位置は逆向きに $7t/3$ 回転するため、符号を誤ると次の接触時刻も面積も変わってしまう。面積計算では、曲線が原点から見て掃く面積と、円 C の扇形面積との差を取る構成を明確にすることが重要である。 $xy' - yx'$ の整理は重いが、最終的に $56 \sin^2(5t/3)$ まで落ちるので、そこまでの計算を答案に残すと検算しやすい。

【第 4 問】

関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$f_1(x) = x^3 - 3x, \quad f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f_1(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (2) a を実数とする。 $f_2(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (3) n を 3 以上の自然数とする。 $f_n(x) = 0$ をみたす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

【方針】

$F(x) = x^3 - 3x$ と置くと $f_{n+1} = F(f_n)$ である。まず $F(x) = a$ の実数解の個数を、極大値 2、極小値 -2 によって分類する。(2) は $F(F(x)) = a$ と見て、外側の方程式 $F(u) = a$ の各解 u に対し、内側の方程式 $F(x) = u$ の解の個数を合計する。 $a = \pm 2$ では外側に重解を含むため個数が 5 になる。(3) は $-2 < a < 2$ なら $F(x) = a$ の 3 解がすべて $(-2, 2)$ に入ることを使い、合成を 1 段階増やすたびに解の個数が 3 倍になることを帰納法で示す。

【解答】

(1) $F(x) = x^3 - 3x$ とおく。すると $f_1(x) = F(x)$ である。 $F'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ より、 F は $(-\infty, -1)$ で増加、 $(-1, 1)$ で減少、 $(1, \infty)$ で増加する。また $F(-1) = 2$, $F(1) = -2$ である。したがって $f_1(x) = a$ を満たす実数 x の個数は

$$\begin{cases} 1 & (a < -2 \text{ または } 2 < a), \\ 2 & (a = -2 \text{ または } a = 2), \\ 3 & (-2 < a < 2) \end{cases}$$

である。

(2) $f_2(x) = F(F(x))$ である。外側の値を $u = F(x)$ とおいて、まず $F(u) = a$ の実数解を調べ、その各 u について $F(x) = u$ の実数解の個数を足し合わせる。 $|a| > 2$ のとき、 $F(u) = a$ は実数解を 1 個だけもつ。 $a > 2$ ならその解は $u > 2$ 、 $a < -2$ なら $u < -2$ である。いずれの場合も $F(x) = u$ は実数解を 1 個だけもつ。したがって $f_2(x) = a$ の実数解は 1 個である。 $a = 2$ のとき、 $F(u) = 2$ は $u^3 - 3u - 2 = (u-2)(u+1)^2 = 0$ より、異なる実数解として $u = -1, 2$ をもつ。 $F(x) = -1$ は $-2 < -1 < 2$ より 3 個の実数解をもち、 $F(x) = 2$ は極大値に対応するので 2 個の実数解をもつ。よって合計 $3 + 2 = 5$ 個である。 $a = -2$ のときも同様に、 $F(u) = -2$ の異なる解は $u = -2, 1$ であり、 $F(x) = -2$ が 2 個、 $F(x) = 1$ が 3 個の実数解をもつので、合計 5 個である。 $-2 < a < 2$ のとき、 $F(u) = a$ は 3 個の実数解をもつ。さらにその 3 解はそれぞれ $-2 < u < -1$, $-1 < u < 1$, $1 < u < 2$ に入る。したがって各 u に対して $F(x) = u$ は 3 個の実数解をもつので、合計 $3 \cdot 3 = 9$ 個である。

以上より、 $f_2(x) = a$ を満たす実数 x の個数は

$$\begin{cases} 1 & (a < -2 \text{ または } 2 < a), \\ 5 & (a = -2 \text{ または } a = 2), \\ 9 & (-2 < a < 2) \end{cases}$$

である。

(3)

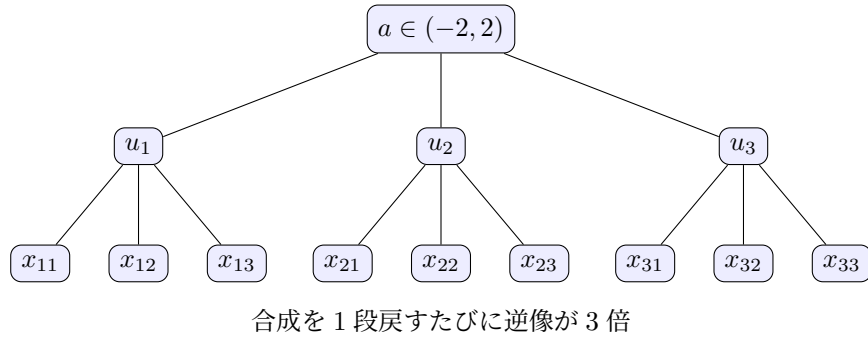
まず、 $-2 < a < 2$ のとき $F(x) = a$ は 3 個の実数解をもち、その 3 解はいずれも $(-2, 2)$ に入ることを確認しておく。これは (1) の増減から、3 つの解がそれぞれ $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ に 1 個ずつあるためである。

この事実を用いて、任意の $m \geq 1$ について、 $-2 < a < 2$ ならば $f_m(x) = a$ を満たす実数 x の個数が 3^m であることを帰納法で示す。 $m = 1$ のときは (1) より成り立つ。 m で成り立つと仮定する。 $f_{m+1}(x) = a$ は $F(f_m(x)) = a$ である。 $F(u) = a$ の 3 個の実数解を u_1, u_2, u_3 とすると、上で述べたように $-2 < u_i < 2$ ($i = 1, 2, 3$) である。帰納法の仮定より、それぞれの方程式 $f_m(x) = u_i$ は 3^m 個の実数解をもつ。また u_1, u_2, u_3 は互いに異なるので、これらの解集合は重ならない。したがって $f_{m+1}(x) = a$ の実数解は $3 \cdot 3^m = 3^{m+1}$ 個である。

よって主張はすべての $m \geq 1$ で成り立つ。特に $a = 0$ は $-2 < 0 < 2$ を満たすので、 $n \geq 3$ に対して $f_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n である。

条件・検算

$a = \pm 2$ では重解を重複して数えず、異なる実数解の個数を数えている。帰納段階では 3 つの中間値が異なるため逆像集合も互いに素である。



【総評】 難度 8、計算量 6。目安時間は 32～38 分。文科第 3 問の一般化であり、合成関数を展開せず、外側から順に値を戻して数える姿勢が重要である。(2) では $a = \pm 2$ の場合だけ、外側の方程式が 2 つの異なる実数解をもち、そのうち一方が端値に当たるため $3 + 2 = 5$ になる。この境界処理を $-2 < a < 2$ と同じ 9 にしてしまう誤りが多い。(3) は、 $-2 < a < 2$ なら解が 3 個あるだけでなく、その 3 個が再び $(-2, 2)$ に入ることが帰納法の継続条件である。答案では、解集合が重ならないことも一言添えると個数の掛け算が明確になる。

【第 5 問】

r を正の実数とする。 xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を A 、点 $P(r, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし、球 A と球 B の和集合とは、球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

- (1) V を r の関数として表し、そのグラフの概形をかけ。
- (2) $V = 8$ となるとき、 r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

注意：円周率 π は $3.14 < \pi < 3.15$ をみたま。

【方針】

2 球の中心間距離は r で、半径はいずれも 1 である。 $r \geq 2$ なら共通部分がないため、和集合の体積は 2 球分で一定になる。 $0 < r < 2$ では、共通部分は 2 つの同じ球冠からなる。中心を結ぶ直線に垂直な平面で切ると、各球から見た球冠の高さは $h = 1 - r/2$ である。球冠体積を 1 変数積分で求め、2 球の体積の和から共通部分を引いて $V(r)$ を出す。最後に単調性を確認し、 $V = 8$ では $r = 1.45$ と 1.55 を評価して小数第 1 位を決める。

【解答】

(1)
2 つの球の半径はいずれも 1 で、中心間距離は r である。まず $r \geq 2$ のとき、2 つの球は内部を共有しない。したがって和集合の体積は 2 つの単位球の体積の和であり、 $V = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{8\pi}{3}$ である。

次に $0 < r < 2$ とする。2 つの球の共通部分は、2 つの同じ高さの球冠からなる。中心を結ぶ線分の中点にある平面が共通部分の境目になり、各球から見た球冠の高さは $h = 1 - \frac{r}{2}$ である。

半径 1 の球の高さ h の球冠の体積を求める。球の中心を原点に置き、 x 軸方向に切ると、断面積は $\pi(1 - x^2)$ である。球冠は $1 - h \leq x \leq 1$ に対応するので、体積は

$$\int_{1-h}^1 \pi(1 - x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{1-h}^1$$

である。これを整理すると $\pi h^2 \left(1 - \frac{h}{3} \right)$ となる。

したがって 2 球の共通部分の体積は $2\pi h^2 \left(1 - \frac{h}{3} \right)$ である。ここに $h = 1 - r/2 = (2 - r)/2$ を代入すると、 $2\pi h^2 \left(1 - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi(4 + r)(2 - r)^2}{12}$ である。

よって和集合の体積は $V = \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi(4 + r)(2 - r)^2}{12}$ であり、整理して $V = \frac{\pi(16 + 12r - r^3)}{12}$ ($0 < r < 2$) となる。し

たがって

$$V = \begin{cases} \frac{\pi(16 + 12r - r^3)}{12} & (0 < r < 2), \\ \frac{8\pi}{3} & (r \geq 2) \end{cases}$$

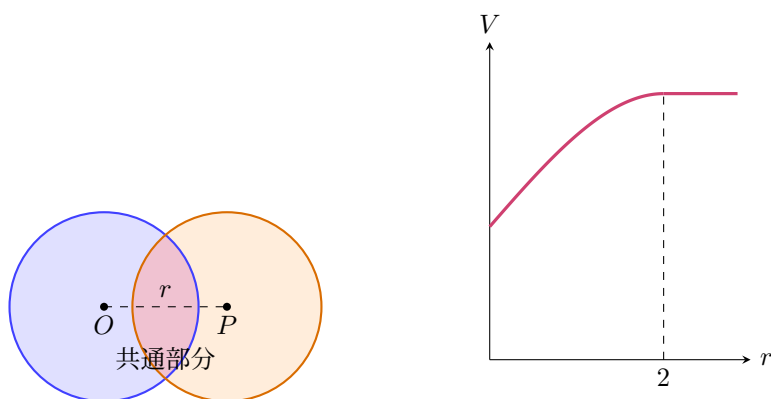
である。 $0 < r < 2$ では $V'(r) = \frac{\pi}{12}(12 - 3r^2) = \frac{\pi(4 - r^2)}{4} > 0$ である。したがってグラフは、 r が 0 に近いところで $4\pi/3$ に近づき、 $0 < r < 2$ で増加し、 $r = 2$ で $8\pi/3$ に達し、その後は水平になる。

(2) $8\pi/3 > 8$ であり、また r が 0 に近いとき V は $4\pi/3 < 8$ に近づくので、 $V = 8$ の解は $0 < r < 2$ にある。さらにこの範囲で V は増加するから、挟み撃ちで r を決められる。 $r = 1.45$ のとき $\frac{16 + 12r - r^3}{12} = 2.52928125$ である。 $\pi < 3.15$ より $V < 2.52928125 \cdot 3.15 = 7.9677359375 < 8$ である。 $r = 1.55$ のとき $\frac{16 + 12r - r^3}{12} = 2.573010 \dots$ である。 $\pi > 3.14$ より $V > 2.573010 \dots \cdot 3.14 > 8$ である。

よって、単調性から $1.45 < r < 1.55$ である。したがって r を四捨五入して小数第 1 位まで求めると $r = 1.5$ である。

条件・検算

$r \rightarrow 0+$ で $V \rightarrow 4\pi/3$ 、 $r = 2$ で両方の式が $8\pi/3$ となる。さらに $0 < r < 2$ で単調増加するので、(2) の解は一意である。



【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 25～32 分。2 球の和集合は「2 球の体積の和から共通部分を引く」と考えるのが最も整理しやすい。 $r = 2$ を境に共通部分が消えるため、関数表示は必ず場合分けが必要である。 $0 < r < 2$ では共通部分を高さ $1 - r/2$ の球冠 2 つとして処理するが、球冠の高さを $r/2$ と取り違えると式全体が崩れる。(2) は方程式を厳密に解く必要はなく、単調性を確認した上で 1.45 と 1.55 を挟めば小数第 1 位が確定する。与えられた $3.14 < \pi < 3.15$ を上限・下限で使い分ける点も採点対象になる。

【第 6 問】

片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り、出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し、3, 4 であればまん中の板を裏返し、5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば、色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて、3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 3 回の操作で左端だけが奇数回、残り 2 枚が偶数回選ばれる列を数える。(2) は操作回数の偶奇で到達できる配置が分かれる。偶数回後には黒い板の枚数が偶数なので「白黒白」は不可能であり、「白白白」の確率だけを求める。奇数回後には「白白白」は不可能であり、「白黒白」の確率だけを求める。偶数回は黒 0 枚状態の確率、奇数回は黒 1 枚状態全体の確率を 2 回操作ごとの漸化式で求め、最後に対称性から特定配置の確率へ直す。

【解答】

(1)

1 回の操作は、左端・まん中・右端のうち 1 枚を等確率で選んで裏返す操作である。3 回後に「黒白白」となるには、左端が奇数回、まん中と右端が偶数回選ばれる必要がある。

左端が 3 回選ばれる場合は 1 通りである。左端が 1 回だけ選ばれる場合は、左端を選ぶ回が 3 通りあり、残り 2 回はまん中だけ、または右端だけにそろそろ必要があるので $3 \cdot 2 = 6$ 通りである。したがって有利な操作列は $1 + 6 = 7$ 通りであり、全操作列は 3^3 通りだから、求める確率は $\frac{7}{3^3} = \frac{7}{27}$ である。

(2)

まず n が偶数の場合を考える。偶数回後には黒い板の枚数も偶数であるから、「白黒白」にはならない。したがって「白白白」となる確率を求めればよい。 $2k$ 回後に「白白白」である確率を q_{2k} とする。偶数回後には黒い板の枚数は 0 枚または 2 枚である。黒 0 枚の状態から 2 回操作して再び黒 0 枚になるには、2 回とも同じ板を選ばばよい。これは 3 通りなので確率は $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ である。黒 2 枚の状態から 2 回操作して黒 0 枚になるには、その黒い 2 枚を 1 回ずつ選ばばよい。順序が 2 通りあるので確率は $\frac{2}{9}$ である。

したがって

$$q_{2k+2} = \frac{1}{3}q_{2k} + \frac{2}{9}(1 - q_{2k}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}q_{2k}$$

である。初期値は $q_0 = 1$ である。固定値 $c = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}c$ は $c = 1/4$ なので、 $q_{2k+2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\left(q_{2k} - \frac{1}{4}\right)$ である。よって

$$q_{2k} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

を得る。問題の操作回数は正なので、偶数の場合は $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$ として用いる。

次に n が奇数の場合を考える。奇数回後には黒い板の枚数が奇数であるから、「白白白」にはならない。したがって「白黒白」となる確率を求めればよい。 $2k + 1$ 回後に黒い板が 1 枚である確率を p_{2k+1} とする。黒 1 枚状態から 2 回後も黒 1 枚である確率は、2 回同じ板を選ぶ 3 通りと、黒 1 枚・白 1 枚を 1 回ずつ選ぶ 4 通りを合わせて $\frac{7}{9}$ である。黒 3 枚状態から 2 回後に黒 1 枚となる確率は、異なる 2 枚を選ぶ 6 通りに対応するので $\frac{6}{9}$ である。したがって

$$p_{2k+3} = \frac{7}{9}p_{2k+1} + \frac{6}{9}(1 - p_{2k+1}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}p_{2k+1}$$

である。 $p_1 = 1$ だから、文科第 4 問と同様に $p_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^k$ となる。

黒い板が 1 枚である 3 つの配置「黒白白」「白黒白」「白白黒」は対称である。したがって「白黒白」となる確率は、この 3 分の 1 であり、

$$\frac{1}{3}p_{2k+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

である。

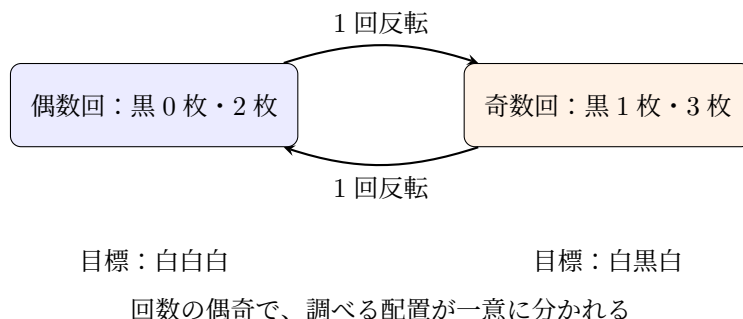
以上より、求める確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^k & (n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots), \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^k & (n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。

条件・検算

偶数回には黒板数が偶数、奇数回には奇数なので、二つの目標配置が同時に起こることはない。 $n = 1$ の式は中央だけ黒となる確率 $1/3$ と一致する。



▶ 解法 2 (偶奇抽出による直接計数)

【方針】

操作列を各板の反転回数の偶奇で直接分類する。偶数回では 3 枚とも偶数回、奇数回では中央だけ奇数回となる列数を偶奇抽出して求める。

【解答】

(1)

左端だけが奇数回選ばれる 3 回の操作列を数える。左端を 3 回選ぶ列が 1 通り、左端を 1 回選び、残り 2 回で同じ他の板を選ぶ列が

$$3 \cdot 2 = 6$$

通りある。したがって求める確率は

$$\frac{7}{27}$$

である。

(2)

$n = 2k$ のとき「白白白」となるには 3 枚がすべて偶数回選ばれればよい。偶奇抽出により、その操作列数は

$$\frac{3^{2k} + 3}{4}$$

通りである。よって確率は

$$\frac{3^{2k} + 3}{4 \cdot 3^{2k}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^k.$$

$n = 2k + 1$ のとき「白黒白」となるには、まん中だけが奇数回、左右が偶数回選ばれればよい。その操作列数は

$$\frac{3^{2k+1} + 1}{4}$$

通りだから、確率は

$$\frac{3^{2k+1} + 1}{4 \cdot 3^{2k+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^k.$$

以上より

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^k & (n = 2k, k = 1, 2, \dots), \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^k & (n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 28～35 分。文科第 4 問よりも条件が細かく、偶数回と奇数回で到達可能な配置が違ふことを最初に分けるのが重要である。偶数回では「白黒白」は起こらず全白だけ、奇数回では全白は起こらず中央だけ黒だけを調べる。漸化式では、黒い板の枚数だけで状態をまとめた後、最後に対称性で特定配置の確率へ戻す。黒 1 枚状態全体の確率をそのまま「白黒白」の確率にしてしまう誤りが起こりやすい。別解の偶奇カウントは短い、なぜ全偶数や特定の奇偶パターンの列数がその式になるかを説明できることが前提である。