

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 2005 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面の原点を O として、2 点

$$P(\cos \theta, \sin \theta), \quad Q(1, 0)$$

をとる。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。点 A は線分 PQ 上を、また点 B は線分 OQ 上を動き、線分 AB は $\triangle OPQ$ の面積を二等分しているとする。このような線分 AB で最も短いものの長さを l とおき、これを θ の関数と考えて $l^2 = f(\theta)$ と表す。

(1) 線分 AQ の長さを a 、 BQ の長さを b とすると、

$$ab = \sin \frac{\theta}{2}$$

が成立することを示せ。

(2) $PQ \geq \frac{1}{2}$ 、 $PQ < \frac{1}{2}$ それぞれの場合について、 $f(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(3) 関数 $f(\theta)$ は $0 < \theta < \pi$ で微分可能であることを示し、そのグラフの概形を描け。また、 $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

第 2 問

10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。 r を自然数とする。このゲームは最大 r ラウンドからなり、第 1 ラウンドから始まる。各ラウンドで、プレイヤーは 10 枚のカードから 1 枚を抜き出し、その数を見てから「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合はそのラウンドでゲームは終了し、最後に抜き出したカードの数が得点となる。「続行」を選択した場合はカードをもとに戻して次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは「停止」しか選択できず、そのラウンドで抜き出したカードの数が得点となる。各ラウンドでは、どのカードも等しい確率 $\frac{1}{10}$ で抜き出されるものとする。

抜き出したカードの数 x によって「停止」または「続行」を選択する規則を、そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに、0 または 1 の値をとる関数

$$f(x) \quad (x = 1, 2, \dots, 10)$$

によって、 $f(x) = 0$ ならば「続行」、 $f(x) = 1$ ならば「停止」と定める。

(1) $1 \leq k < 10$ を満たす自然数 k に対し、

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & (1 \leq x \leq k), \\ 1 & (k < x \leq 10) \end{cases}$$

とする。最終ラウンドを除くすべてのラウンドで f_k による戦略を採用したときの得点の期待値を、 r と k で表せ。

- (2) $r = 2$ のとき、得点の期待値が最大となる第 1 ラウンドでの戦略を与え、そのときの期待値を求めよ。
- (3) $r = 3$ のとき、得点の期待値が最大となる第 1・第 2 ラウンドでの戦略をそれぞれ与え、そのときの期待値を求めよ。

第 3 問

a は

$$-\frac{1}{2} \leq a < 2$$

を満たす実数とする。 xy 平面の領域 D, E を

$$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad E: a \leq x \leq a+1$$

で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。

- (1) $S(a)$ を定積分で表せ。
- (2) 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ。
- (3) $S(a)$ を最大にする実数 a を解にもつ 4 次方程式

$$3x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \quad (p, q, r, s \text{ は整数})$$

を求めよ。

- (4) (3) で求めた方程式で $x = \sqrt{2}t$ とおき、さらに

$$z = t - \frac{1}{t}$$

とすることにより、この方程式を z についての 2 次方程式として表せ。

- (5) $S(a)$ を最大にする a の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)