

東京大学 2005 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面の原点を O として、2 点

$$P(\cos \theta, \sin \theta), \quad Q(1, 0)$$

をとる。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。点 A は線分 PQ 上を、また点 B は線分 OQ 上を動き、線分 AB は $\triangle OPQ$ の面積を二等分しているとする。このような線分 AB で最も短いものの長さを l とおき、これを θ の関数と考えて $l^2 = f(\theta)$ と表す。

(1) 線分 AQ の長さを a 、 BQ の長さを b とすると、

$$ab = \sin \frac{\theta}{2}$$

が成立することを示せ。

(2) $PQ \geq \frac{1}{2}$ 、 $PQ < \frac{1}{2}$ それぞれの場合について、 $f(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(3) 関数 $f(\theta)$ は $0 < \theta < \pi$ で微分可能であることを示し、そのグラフの概形を描け。また、 $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は頂点 Q を共有する 2 三角形の面積比を使う。(2) は $s = \sin(\frac{\theta}{2})$ と置き、 $ab = s$ のもとで余弦定理による AB^2 を最小化する。ただし A, B が線分上にある制約から $s \leq a \leq 2s$ が生じる。(3) は境界 $s = \frac{1}{4}$ で左右の値と導関数を照合する。

【解答】

(1) $PQ = 2 \sin(\frac{\theta}{2})$ である。 $\triangle ABQ$ と $\triangle OPQ$ は頂点 Q の角を共有するから、面積比は

$$\frac{[ABQ]}{[OPQ]} = \frac{AQ}{PQ} \cdot \frac{BQ}{OQ} = \frac{ab}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}.$$

AB が面積を二等分するので左辺は $\frac{1}{2}$ であり

$$ab = \sin \frac{\theta}{2}$$

を得る。

(2) $s = \sin(\frac{\theta}{2})$ とおく。 $\angle AQB = \frac{\pi - \theta}{2}$ なので、その余弦は s である。余弦定理と $ab = s$ から

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2abs = a^2 + \frac{s^2}{a^2} - 2s^2.$$

また $A \in PQ, B \in OQ$ より

$$0 < a \leq 2s, \quad 0 < b = \frac{s}{a} \leq 1,$$

すなわち $s \leq a \leq 2s$ である。

制約がなければ $a^2 + \frac{s^2}{a^2}$ は $a = \sqrt{s}$ で最小となる。これが $a \leq 2s$ を満たす条件は $s \geq \frac{1}{4}$ 、すなわち $PQ \geq \frac{1}{2}$ である。このとき

$$f(\theta) = 2s - 2s^2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

一方 $s < \frac{1}{4}$ では区間の右端 $a = 2s$ で最小となり、 $b = \frac{1}{2}$ だから

$$f(\theta) = 4s^2 + \frac{1}{4} - 2s^2 = \frac{1}{4} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

(3) $\theta_0 = 2 \arcsin(\frac{1}{4})$ とする。 $\theta = \theta_0$ で両式の値はともに $\frac{3}{8}$ である。左側の導関数は

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{4} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \sin \theta,$$

右側の導関数は

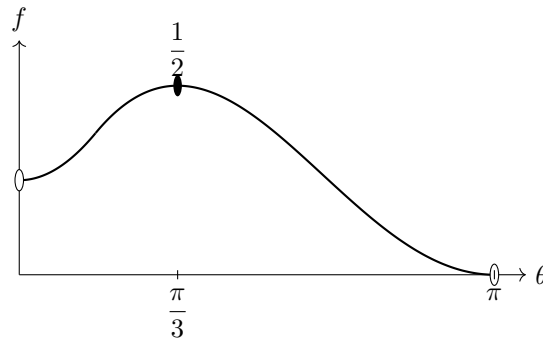
$$\frac{d}{d\theta} \{2s(1-s)\} = (1-2s) \cos \frac{\theta}{2}.$$

$s = \frac{1}{4}$ ではどちらも $\frac{1}{2} \cos(\frac{\theta_0}{2})$ となるので、 f は境界でも微分可能である。

s は θ とともに 0 から 1 へ増加する。 f は $s = \frac{1}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ まで増加し、その後減少する。最大値は

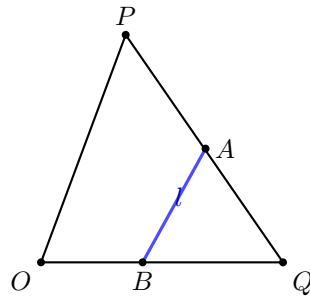
$$2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

概形は次の通りである。



条件・検算

制約なしの停留点が線分条件 $s \leq a \leq 2s$ に入るかを判定する。接点では値だけでなく導関数も一致する。



▶ 解法 2 (微分による制約付き最小化)

【方針】

$s = \sin(\frac{\theta}{2})$ とし、 $ab = s$ を使って AB^2 を a の一変数関数にする。許容区間 $s \leq a \leq 2s$ 上で微分し、停留点が区間内に入るかで場合分けする。

【解答】

(1)

$\triangle ABQ$ と $\triangle OPQ$ の面積比より

$$\frac{1}{2} = \frac{AQ}{PQ} \frac{BQ}{OQ} = \frac{ab}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}.$$

したがって

$$ab = \sin \frac{\theta}{2}.$$

(2)

$$s = \sin \frac{\theta}{2}$$

とおく。 $ab = s$ かつ A, B が線分上にあることから

$$s \leq a \leq 2s, \quad b = \frac{s}{a}.$$

余弦定理より

$$F(a) = AB^2 = a^2 + \frac{s^2}{a^2} - 2s^2.$$

微分すると

$$F'(a) = \frac{2(a^4 - s^2)}{a^3}.$$

制約がなければ $a = \sqrt{s}$ で最小となる。これが $a \leq 2s$ を満たすのは $s \geq \frac{1}{4}$ 、すなわち $PQ \geq \frac{1}{2}$ のときである。よって

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4} + 2s^2 & (0 < s < \frac{1}{4}), \\ 2s(1-s) & (\frac{1}{4} \leq s < 1). \end{cases}$$

(3)

$\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos(\frac{\theta}{2}) > 0$ である。 $s = \frac{1}{4}$ では両式の値が $\frac{3}{8}$ で一致し、 s による導関数も

$$4s = 1, \quad 2 - 4s = 1$$

と一致するので、 f は微分可能である。 $s < \frac{1}{4}$ では増加し、 $2s(1-s)$ は $s = \frac{1}{2}$ で最大となる。したがって

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \max f(\theta) = \frac{1}{2}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 30 分程度で、難問として後半に回す選択もある。得点差がつくのは、積一定の最小化に線分上の制約 $s \leq a \leq 2s$ を重ね、 $s = \frac{1}{4}$ で場合分けする点である。完答では接続点の値だけでなく左右の導関数まで照合する。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 2 問】

10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。 r を自然数とする。このゲームは最大 r ラウンドからなり、第 1 ラウンドから始まる。各ラウンドで、プレイヤーは 10 枚のカードから 1 枚を抜き出し、その数を見てから「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合はそのラウンドでゲームは終了し、最後に抜き出したカードの数が得点となる。「続行」を選択した場合はカードをもとに戻して次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは「停止」しか選択できず、そのラウンドで抜き出したカードの数が得点となる。各ラウンドでは、どのカードも等しい確率 $\frac{1}{10}$ で抜き出されるものとする。

抜き出したカードの数 x によって「停止」または「続行」を選択する規則を、そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに、0 または 1 の値をとる関数

$$f(x) \quad (x = 1, 2, \dots, 10)$$

によって、 $f(x) = 0$ ならば「続行」、 $f(x) = 1$ ならば「停止」と定める。

(1) $1 \leq k < 10$ を満たす自然数 k に対し、

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & (1 \leq x \leq k), \\ 1 & (k < x \leq 10) \end{cases}$$

とする。最終ラウンドを除くすべてのラウンドで f_k による戦略を採用したときの得点の期待値を、 r と k で表せ。

(2) $r = 2$ のとき、得点の期待値が最大となる第 1 ラウンドでの戦略を与え、そのときの期待値を求めよ。

(3) $r = 3$ のとき、得点の期待値が最大となる第 1・第 2 ラウンドでの戦略をそれぞれ与え、そのときの期待値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は各非最終ラウンドへ到達する確率が $(\frac{k}{10})^{j-1}$ であることを使い、停止時の得点寄与を等比級数で加える。(2)(3) は後のラウンドから最適期待値を求め、目の数が続行価値を上回るときだけ停止する後ろ向きの判断を行う。

【解答】

(1) 非最終ラウンドで続行する確率は $\frac{k}{10}$ である。1 回のラウンドで停止して得る得点の無条件の寄与は

$$\frac{1}{10} \sum_{x=k+1}^{10} x = \frac{55 - \frac{k(k+1)}{2}}{10}.$$

したがって期待値を $E_{r,k}$ とすると

$$E_{r,k} = \frac{55 - \frac{k(k+1)}{2}}{10} \sum_{j=0}^{r-2} \left(\frac{k}{10}\right)^j + \frac{11}{2} \left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}.$$

等比級数を整理すると

$$E_{r,k} = \frac{k+11}{2} - \frac{k^r}{2 \cdot 10^{r-1}}.$$

(2) 最終ラウンドの期待値は

$$\frac{1+2+\cdots+10}{10} = \frac{11}{2}.$$

第 1 ラウンドで $x > \frac{11}{2}$ なら停止し、 $x < \frac{11}{2}$ なら続行するのが最適である。よって 1 から 5 では続行、6 から 10 では停止する戦略 f_5 を用いる。その期待値は

$$\frac{5 \cdot \left(\frac{11}{2}\right) + (6+7+8+9+10)}{10} = \frac{27}{4}.$$

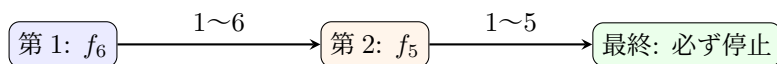
(3) 第 2 ラウンドでは (2) と同じ f_5 が最適で、そのラウンド以降の期待値は $\frac{27}{4}$ である。第 1 ラウンドでは $x > \frac{27}{4}$ のとき停止すべきだから、1 から 6 で続行、7 から 10 で停止する f_6 が最適である。最大期待値は

$$\frac{6 \cdot \left(\frac{27}{4}\right) + (7 + 8 + 9 + 10)}{10} = \frac{149}{20}.$$

したがって第 1 ラウンドは f_6 、第 2 ラウンドは f_5 を用いる。

条件・検算

停止のしきい値は続行価値との比較で決まる。同値の場合の選択は期待値を変えないが、本問の最適境界では整数値との一致は起こらない。



続行価値を後ろから計算

▶ 解法 2 (戦略番号ごとの差分比較)

【方針】

固定戦略の期待値を閉じた式にしたあと、 k を 1 増やしたときの差を調べて最適なしきい値を決める。3 ラウンドでは第 2 ラウンドの最適価値を続行価値として第 1 ラウンドを同様に比較する。

【解答】

(1)

停止時の 1 ラウンド当たりの寄与は

$$\frac{1}{10} \sum_{x=k+1}^{10} x = \frac{55 - \frac{k(k+1)}{2}}{10}.$$

到達確率を等比級数で足すと

$$\begin{aligned} E_{r,k} &= \frac{55 - \frac{k(k+1)}{2}}{10} \sum_{j=0}^{r-2} \left(\frac{k}{10}\right)^j \\ &\quad + \frac{11}{2} \left(\frac{k}{10}\right)^{r-1} \\ &= \frac{k+11}{2} - \frac{k^r}{2 \cdot 10^{r-1}}. \end{aligned}$$

(2)

$$E_{2,k} = \frac{k+11}{2} - \frac{k^2}{20}$$

だから

$$E_{2,k+1} - E_{2,k} = \frac{9-2k}{20}.$$

$k=4$ までは正、 $k=5$ から負なので最大は $k=5$ であり、

$$f_5, \quad E_{2,5} = \frac{27}{4}.$$

(3)

第 2 ラウンドの続行価値は $\frac{27}{4}$ である。第 1 ラウンドで f_k を使うと

$$G_k = \frac{k\left(\frac{27}{4}\right) + \sum_{x=k+1}^{10} x}{10}.$$

したがって

$$G_{k+1} - G_k = \frac{\frac{27}{4} - (k+1)}{10}.$$

$k = 5$ から 6 へは増え、 6 から 7 へは減るので第 1 ラウンドは f_6 、第 2 ラウンドは f_5 が最適である。最大期待値は

$$G_6 = \frac{149}{20}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 25 分程度で、得点差のつく期待値問題である。最適戦略は現在の数と『続行した場合の期待値』の比較で決まり、最終ラウンドから逆向きに考えるのが核心である。(1) の閉じた式は検算にも使える。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 3 問】

a は

$$-\frac{1}{2} \leq a < 2$$

を満たす実数とする。 xy 平面の領域 D, E を

$$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad E: a \leq x \leq a+1$$

で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。

- (1) $S(a)$ を定積分で表せ。
- (2) 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ。
- (3) $S(a)$ を最大にする実数 a を解にもつ 4 次方程式

$$3x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \quad (p, q, r, s \text{ は整数})$$

を求めよ。

- (4) (3) で求めた方程式で $x = \sqrt{2}t$ とおき、さらに

$$z = t - \frac{1}{t}$$

とすることにより、この方程式を z についての 2 次方程式として表せ。

- (5) $S(a)$ を最大にする a の値を求めよ。

【方針】

円環の縦断面の高さを $g(x)$ とし、

$$S(a) = \int_a^{a+1} g(x) dx$$

と考える。(1)(2) は端点が半径 $1 \cdot 2$ の円をまたぐ位置で場合分けする。最大点は $S'(a) = g(a+1) - g(a) = 0$ から求め、平方根を 2 回整理して 4 次方程式を得る。指定の置換は相反形を 2 次式へ下げる。

【解答】

円環の x における縦断面の高さを

$$g(x) = \begin{cases} 2\{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}\} & (|x| \leq 1), \\ 2\sqrt{4-x^2} & (1 \leq |x| \leq 2), \\ 0 & (|x| \geq 2) \end{cases}$$

とする。

(1) ストリップの位置により

$$S(a) = \begin{cases} 2 \int_{a+1}^{a+1} \{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}\} dx & (-\frac{1}{2} \leq a < 0), \\ 2 \int_{a+1}^1 \{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}\} dx + 2 \int_1^{a+1} \sqrt{4-x^2} dx & (0 \leq a < 1), \\ 2 \int_a^{a+1} \sqrt{4-x^2} dx & (1 \leq a < 2) \end{cases}$$

である。

(2) $S'(a) = g(a+1) - g(a)$ を用いると

$$S'(a) = \begin{cases} 2\{\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{1-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}\} & (-\frac{1}{2} < a < 0), \\ 2\{\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}\} & (0 \leq a < 1), \\ -2\sqrt{4-a^2} & (1 \leq a < 2). \end{cases}$$

なお $a = -\frac{1}{2}$ での右微分は 0 である。

(3) $0 \leq x \leq 1$ で $g(x)$ は増加し、 $1 \leq x \leq 2$ で減少する。したがって $0 < a < 1$ では $S'(a) = g(a+1) - g(a)$ は狭義に減少する。また

$$S'(0) = 2\sqrt{3} - 2 > 0, \quad S'(1) = -2\sqrt{3} < 0.$$

負の a では $S'(a) \geq 0$ 、 $1 \leq a < 2$ では $S'(a) < 0$ なので、最大点は $0 < a < 1$ にただ 1 つあり、そこで

$$\sqrt{4-(a+1)^2} + \sqrt{1-a^2} = \sqrt{4-a^2}$$

が成り立つ。1 回平方して整理すると

$$2\sqrt{\{3-2a-a^2\}(1-a^2)} = a(a+2).$$

さらに平方して展開すると

$$3a^4 + 4a^3 - 20a^2 - 8a + 12 = 0.$$

よって求める方程式は

$$3x^4 + 4x^3 - 20x^2 - 8x + 12 = 0.$$

(4) $x = \sqrt{2}t$ を代入した式を 4 で割ると

$$3t^4 + 2\sqrt{2}t^3 - 10t^2 - 2\sqrt{2}t + 3 = 0.$$

t^2 で割り、 $z = t - \frac{1}{t}$ 、 $t^2 + t^{-2} = z^2 + 2$ を用いると

$$3z^2 + 2\sqrt{2}z - 4 = 0.$$

(5) (4) から

$$z = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{14}}{3}.$$

最大点では $0 < a < 1$ だから $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、 $z = t - \frac{1}{t} < 0$ である。よって

$$z = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{3}.$$

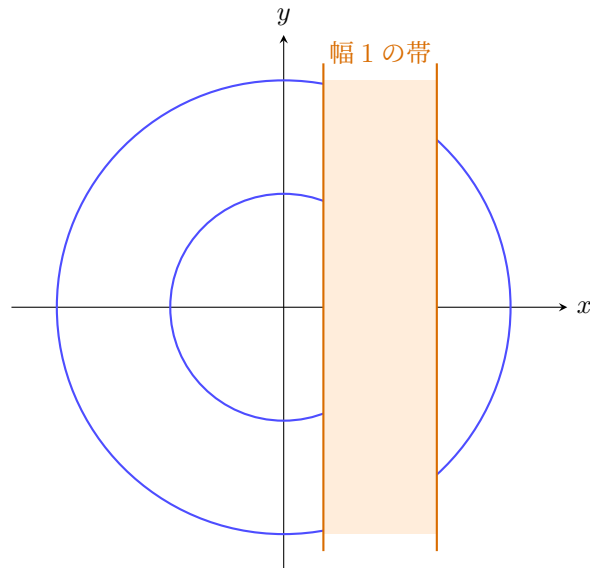
$t^2 - zt - 1 = 0$ の正の解を選び、 $a = \sqrt{2}t$ へ戻すと

$$a = \frac{\sqrt{26 + 2\sqrt{7}} - 1 - \sqrt{7}}{3}.$$

この値は $0 < a < 1$ で、平方する前の $S'(a) = 0$ の式も満たす。したがってこれが $S(a)$ を最大にする値である。

条件・検算

移動区間積分の微分は右端断面と左端断面の差になる。平方して得た 4 次式には余分な根が入り得るため、最後に元の導関数へ戻して確認する。



【総評】 難度 8、計算量 9。想定時間は 40 分以上で、最難関級として後回しも合理的である。得点差がつくのは、面積を直接積分し切らず $S'(a) = g(a+1) - g(a)$ と端の断面差で扱う点である。(3) までなら平方後の 4 次式、(4)(5) では相反形 $t^2 + t^{-2}$ を見落とさない。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。