

入 学 試 験 問 題



数 学

東 京 大 学 2005 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$x > 0$ に対し $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n = 1, 2, \dots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し、 a_n , b_n に関する漸化式を求めよ。

(2)

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおく。 h_n を用いて a_n , b_n の一般項を求めよ。

第 2 問

$|z| > \frac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち、

$$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leq \frac{5}{4} \right\}$$

とする。このとき、 T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

第 3 問

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$$

とする。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $x > \frac{1}{2}$ ならば $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ であることを示せ。
- (2) x_0 を正の数とすると、数列 $\{x_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) を、 $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める。
 $x_0 > \frac{1}{2}$ であれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

であることを示せ。

第 4 問

3 以上 9999 以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

第 5 問

N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ、計 N 枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

- (i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b = 0$ とする。 $a + b > N$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iii) $a + b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a + b < c$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iv) $a + b \geq c$ の場合は、乙はもう 1 回カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a + b < c + d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。
- (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。

第 6 問

r を正の実数とする。 xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y^2 + z^2 \geq r^2, \quad z^2 + x^2 \leq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)