

東京大学 2005 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$x > 0$ に対し $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n = 1, 2, \dots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し、 a_n , b_n に関する漸化式を求めよ。

(2)

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおく。 h_n を用いて a_n , b_n の一般項を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $n = 1$ を直接確かめたうえで、仮定した形を微分し、分子の定数項と $\log x$ の係数を比較する。微分により分母の次数が 1 つ増え、分子は再び「定数項 + $\log x$ の係数」の形になるので、数学的帰納法で表示が示せる。(2) はまず $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ から b_n を求め、次に $a_n = (-1)^{n-1}n!c_n$ と正規化して調和和の漸化式に直す。別解として、積の高階微分公式を用いると一般項を直接確認できる。

【解答】

(1)

まず $f'(x) = (\log x \cdot x^{-1})' = \frac{1 - \log x}{x^2}$ である。したがって $a_1 = 1$, $b_1 = -1$ とおけば、 $n = 1$ のとき表示は成り立つ。

ある $n \geq 1$ について $f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$ と表されていると仮定する。これを微分すると

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{b_n}{x} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} + (a_n + b_n \log x) \{-(n+1)x^{-n-2}\} \\ &= \frac{b_n - (n+1)a_n - (n+1)b_n \log x}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

である。よって $n+1$ のときも同じ形で表され、係数は $a_{n+1} = b_n - (n+1)a_n$, $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ を満たす。以上より、すべての $n = 1, 2, \dots$ について表示が成り立つ。

(2)

まず $b_1 = -1$, $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ より、符号と階乗を追うと $b_n = (-1)^n n!$ である。実際、 $n = 1$ で正しく、 $b_n = (-1)^n n!$ なら $b_{n+1} = -(n+1)(-1)^n n! = (-1)^{n+1} (n+1)!$ となる。

次に a_n を求める。 $b_n = (-1)^n n!$ を漸化式に代入して $a_{n+1} = (-1)^n n! - (n+1)a_n$ である。ここで $a_n = (-1)^{n-1} n! c_n$ とおく。 $a_1 = 1$ より $c_1 = 1$ である。また $(-1)^n (n+1)! c_{n+1} = (-1)^n n! - (n+1)(-1)^{n-1} n! c_n$ だから、両辺を $(-1)^n (n+1)!$ で割って $c_{n+1} = \frac{1}{n+1} + c_n$ を得る。したがって $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = h_n$ である。よって $a_n = (-1)^{n-1} n! h_n$, $b_n = (-1)^n n!$ である。

条件・検算

初期値 $a_1 = 1, b_1 = -1$ と漸化式へ一般項を戻して検算する。高階微分の符号と分母指数を各段階で確認する。

$$\begin{array}{ccc}
 (a_n, b_n) & \xrightarrow{\text{1 回微分}} & (a_{n+1}, b_{n+1}) \\
 b_{n+1} = -(n+1)b_n \\
 a_{n+1} = b_n - (n+1)a_n
 \end{array}$$

▶ 解法 2 (積の高階微分による直接計算)

【方針】

$f(x) = (\log x)x^{-1}$ に積の高階微分公式を適用する。 $\log x$ と x^{-1} の各階導関数を代入すると、組合せ係数と階乗の約分から調和和が直接現れる。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
 (\log x)^{(k)} &= (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} \quad (k \geq 1), \\
 (x^{-1})^{(m)} &= (-1)^m m! x^{-m-1}
 \end{aligned}$$

である。積の高階微分公式から

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(x) &= \log x \cdot (-1)^n n! x^{-n-1} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n {}_n C_k \{(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}\} \\
 &\quad \cdot \{(-1)^{n-k}(n-k)!x^{-n+k-1}\}.
 \end{aligned}$$

よって所定の形で表される。さらにこの形を 1 回微分すれば

$$a_{n+1} = b_n - (n+1)a_n, \quad b_{n+1} = -(n+1)b_n$$

を得る。

(2)

各項を整理すると

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n! \log x}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1} n! h_n + (-1)^n n! \log x}{x^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

したがって

$$a_n = (-1)^{n-1} n! h_n, \quad b_n = (-1)^n n!.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。高階導関数を形で管理し、係数比較から漸化式を作る標準的な問題で、目安は 20 分程度である。(1) では分母の指数が $n+2$ になることと、 $\log x$ の係数が $-(n+1)b_n$ になることを丁寧に書くと符号ミスを防げる。(2) は b_n を先に決め、 a_n を $(-1)^{n-1} n!$ で割って調和和に帰着するのが安定する。別解の積の高階微分は速いが、組合せ係数と階乗が約分されて $\frac{1}{k}$ が出るところを省くと説得力が落ちる。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 2 問】

$|z| > \frac{5}{4}$ となるような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち、

$$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leq \frac{5}{4} \right\}$$

とする。このとき、 T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$w = z^2 - 2z$ を $w + 1 = (z - 1)^2$ と平方完成する。 $u = z - 1$ とおけば、同じ w に対応する 2 つの z は $1 + u$ と $1 - u$ である。 w が T に入るには、この 2 つの逆像がともに半径 $\frac{5}{4}$ の円内にあることが必要十分なので、 u は中心 1 と -1 の 2 円の共通部分を動く。 $u = X + Yi$ として、固定した $|X|$ に対し $|u^2 - 1|^2$ が Y^2 について増加することを示し、共通部分の上端で最大化する。

【解答】

$u = z - 1$ とおくと $w = z^2 - 2z = (z - 1)^2 - 1 = u^2 - 1$ である。ある w に対して $u^2 = w + 1$ を満たす u を 1 つ取ると、対応する z は $z = 1 + u$, $z = 1 - u$ の 2 つである。 $u = 0$ のときは同じ値になるが、この場合も以下の条件に含まれる。

したがって、 w が T に属するためには、 $w = z^2 - 2z$ と表すすべての z が $|z| \leq \frac{5}{4}$ を満たせばよい。これは $|1 + u| \leq \frac{5}{4}$, $|1 - u| \leq \frac{5}{4}$ と同値である。 $u = X + Yi$ とおく。この条件は $(X + 1)^2 + Y^2 \leq \frac{25}{16}$, $(X - 1)^2 + Y^2 \leq \frac{25}{16}$ である。 $X_0 = |X|$ とおくと、2 つの不等式のうち厳しい方は中心から遠い側であり、 $Y^2 \leq \frac{25}{16} - (1 + X_0)^2 = \frac{9}{16} - 2X_0 - X_0^2$ である。右辺が 0 以上でなければならないので、特に $0 \leq X_0 \leq \frac{1}{4}$ である。

一方、

$$\begin{aligned} |w|^2 &= |u^2 - 1|^2 \\ &= |(X^2 - Y^2 - 1) + 2XYi|^2 \\ &= (1 - X_0^2 + Y^2)^2 + 4X_0^2 Y^2 \end{aligned}$$

である。 X_0 を固定し、 $v = Y^2$ とおくと、右辺は $(1 - X_0^2 + v)^2 + 4X_0^2 v$ であり、 v で微分すると $2(1 - X_0^2 + v) + 4X_0^2 = 2(1 + X_0^2 + v) > 0$ である。したがって、固定した X_0 に対して $|w|^2$ は Y^2 が最大るとき最大になる。

よって $Y^2 = \frac{9}{16} - 2X_0 - X_0^2$ を代入すればよい。このとき $1 - X_0^2 + Y^2 = \frac{25}{16} - 2X_0 - 2X_0^2$ であるから、

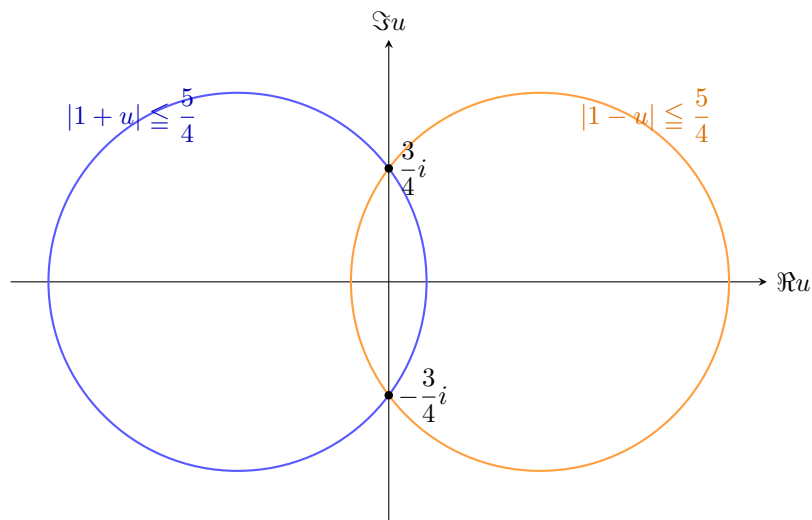
$$\begin{aligned} |w|^2 &\leq \left(\frac{25}{16} - 2X_0 - 2X_0^2 \right)^2 + 4X_0^2 \left(\frac{9}{16} - 2X_0 - X_0^2 \right) \\ &= \frac{625}{256} - \frac{25}{4} X_0 \\ &\leq \frac{625}{256} \end{aligned}$$

である。したがって $|w| \leq \frac{25}{16}$ である。

等号が成り立つには $X_0 = 0$ かつ $Y^2 = \frac{9}{16}$ であればよい。このとき $u = \pm \frac{3}{4}i$ であり、実際 $|1 + u| = |1 - u| = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$ を満たす。対応する w は $w = u^2 - 1 = -\frac{9}{16} - 1 = -\frac{25}{16}$ である。よって、 T に属する複素数のうち絶対値が最大となるものは $-\frac{25}{16}$ である。

条件・検算

集合 T では同じ w を与える 2 つの逆像がともに円内に必要である。等号時の $u = \pm \frac{3i}{4}$ は両方の境界条件を満たす。



▶ 解法 2 (2 円の和と三角不等式による別解)

【方針】

$u = z - 1$ とし、2 つの逆像 $1 \pm u$ がともに半径 $\frac{5}{4}$ の円内にある条件を使う。2 条件を加えて $|u|$ を直接評価し、三角不等式で $|u^2 - 1|$ を抑える。

【解答】

$u = z - 1$ とおくと

$$w = u^2 - 1.$$

同じ w に対応する 2 つの逆像は $z = 1 + u, 1 - u$ であるから、 $w \in T$ の必要十分条件は

$$|1 + u| \leq \frac{5}{4}, \quad |1 - u| \leq \frac{5}{4}$$

である。

2 つの不等式を 2 乗して加えると

$$|1 + u|^2 + |1 - u|^2 = 2(1 + |u|^2) \leq 2 \left(\frac{5}{4} \right)^2.$$

したがって

$$|u| \leq \frac{3}{4}.$$

ゆえに三角不等式から

$$|w| = |u^2 - 1| \leq |u|^2 + 1 \leq \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}.$$

両方の等号が成り立つには

$$|u| = \frac{3}{4}, \quad u^2 \leq 0$$

であればよい。よって

$$u = \pm \frac{3}{4}i.$$

このとき $|1 \pm u| = \frac{5}{4}$ で条件を満たし、

$$w = u^2 - 1 = -\frac{25}{16}.$$

したがって求める w は

$$-\frac{25}{16}$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 7。2 次写像の像を直接描くより、 $w+1=(z-1)^2$ として 2 つの逆像 $1+u$, $1-u$ を同時に制限するのが核心である。目安は 30 分程度で、 $|1+u| \leq \frac{5}{4}$ と $|1-u| \leq \frac{5}{4}$ の両方が必要十分条件になる点を落とすと、集合 T を大きく取り過ぎてしまう。最大化では $|X|$ を固定して Y^2 の上限に押し上げる流れが重要で、等号条件が 2 円の交点 $u = \pm \frac{3i}{4}$ に対応することまで確認したい。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 3 問】

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$$

とする。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $x > \frac{1}{2}$ ならば $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とすると、数列 $\{x_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) を、 $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める。 $x_0 > \frac{1}{2}$ であれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は微分して $f'(x) = \frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})e^{-2(x-1)}$ を得る。 $u = 2x - 1$ とおくと $2f'(x) = 1 - ue^{1-u}$ となるので、 $e^{u-1} \geq u$ を微分で示せば $f'(x) \geq 0$ が従う。上からの評価 $f'(x) < \frac{1}{2}$ は $x > \frac{1}{2}$ から直ちに出る。(2) はまず $(\frac{1}{2}, \infty)$ が f で保たれることを確認し、平均値の定理で $|x_{n+1} - 1| < \frac{|x_n - 1|}{2}$ を示す。別解として、 $f(x) - x$ の符号から単調有界性を示しても収束が証明できる。

【解答】

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\{1 + e^{-2(x-1)}\} + \frac{1}{2}x\{-2e^{-2(x-1)}\} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2(x-1)} \\ &= \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)} \end{aligned}$$

である。 $x > \frac{1}{2}$ とし、 $u = 2x - 1$ とおくと $u > 0$ であり、 $2\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)} = ue^{1-u}$ だから $2f'(x) = 1 - ue^{1-u}$ である。

ここで $\phi(u) = e^{u-1} - u$ とおくと、 $\phi'(u) = e^{u-1} - 1$ である。したがって $0 < u < 1$ では $\phi'(u) < 0$, $u > 1$ では $\phi'(u) > 0$ となり、 $\phi(u)$ は $u = 1$ で最小値 $\phi(1) = 0$ をとる。よって $e^{u-1} \geq u$ であり、これは $ue^{1-u} \leq 1$ と同値である。したがって $f'(x) \geq 0$ である。

また $x > \frac{1}{2}$ では $\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)} > 0$ だから $f'(x) = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)} < \frac{1}{2}$ である。以上より $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ が示された。

(2)

まず $x > \frac{1}{2}$ なら $f(x) > \frac{1}{2}$ であることを確認する。(1) より f は $(\frac{1}{2}, \infty)$ で増加し、 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + e) > \frac{1}{2}$ であるから、 $x > \frac{1}{2}$ に対して $f(x) > \frac{1}{2}$ である。よって $x_0 > \frac{1}{2}$ なら帰納的に $x_n > \frac{1}{2}$ がすべての n で成り立つ。

また $f(1) = 1$ である。 x_n と 1 の間にある数を c_n とすると、平均値の定理により $x_{n+1} - 1 = f(x_n) - f(1) = f'(c_n)(x_n - 1)$

と書ける。 $x_n > \frac{1}{2}$ かつ $1 > \frac{1}{2}$ なので $c_n > \frac{1}{2}$ であり、(1) から $0 \leq f'(c_n) < \frac{1}{2}$ である。したがって $|x_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|x_n - 1|$ を得る。

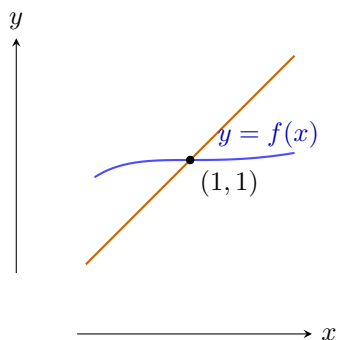
これを繰り返すと $|x_n - 1| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1|$ である。右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束するので、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

である。

条件・検算

平均値の定理を使う解法では区間 $(\frac{1}{2}, \infty)$ の不変性が先に必要である。単調有界法でも極限が正であるため除算できる。



▶ 解法 2 (単調有界性による収束)

【方針】

(1) は $\log u \leq u - 1$ を微分で示して導関数を評価する。(2) は $f(x) - x$ の符号と f の増加性から、1 の上下で数列が単調かつ 1 を越えないことを示す。

【解答】

(1)

$u = 2x - 1 > 0$ とおくと

$$2f'(x) = 1 - ue^{1-u}.$$

関数 $\psi(u) = u - 1 - \log u$ は

$$\psi'(u) = 1 - \frac{1}{u}$$

より $u = 1$ で最小値 0 をとる。したがって

$$\log u \leq u - 1, \quad ue^{1-u} \leq 1.$$

ゆえに $f'(x) \geq 0$ である。また $x > \frac{1}{2}$ では

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2(x-1)} < \frac{1}{2}.$$

(2)

$$f(x) - x = \frac{x}{2} \{e^{-2(x-1)} - 1\}.$$

したがって

$$\frac{1}{2} < x < 1 \implies f(x) > x, \quad x > 1 \implies f(x) < x.$$

さらに (1) より f は増加し、 $f(1) = 1$ だから

$$\frac{1}{2} < x < 1 \implies x < f(x) < 1,$$

$$x > 1 \implies 1 < f(x) < x.$$

よって $x_0 < 1$ なら $\{x_n\}$ は増加して 1 以下、 $x_0 > 1$ なら減少して 1 以上であり、 $x_0 = 1$ なら定数列である。いずれも極限 L をもち、連続性から $L = f(L)$ である。 $L > \frac{1}{2}$ なので

$$1 = \frac{1}{2} \{1 + e^{-2(L-1)}\}$$

となり、 $L = 1$ を得る。

【総評】 難度 7、計算量 5。微分による不等式と数列の収束を組み合わせる問題で、目安は 25 分程度である。(1) では $e^{u-1} \geq u$ を単に既知として使わず、 $\phi(u) = e^{u-1} - u$ の最小値で示すと高校範囲の答案として安定する。(2) は $x_n > \frac{1}{2}$ が保たれることを先に確認してから平均値の定理を使うのが本線である。別解の単調有界法では、 $x < 1$ と $x > 1$ で $f(x) - x$ の符号が変わること、かつ $f(1) = 1$ と増加性で区間から出ないことを明記する必要がある。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 4 問】

3 以上 9999 以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

整数条件は $a(a-1)$ が $10000 = 16 \cdot 625$ で割り切れることに尽きる。連続する 2 整数 a と $a-1$ は互いに素で、さらに a は奇数なので、 2^4 は必ず $a-1$ 側に入る。残る $5^4 = 625$ は互いに素な 2 因子のどちらか一方に丸ごと入るため、 $625 \mid a-1$ と $625 \mid a$ の 2 場合を調べればよい。最後に $3 \leq a \leq 9999$ の範囲と奇数条件を確認する。

【解答】

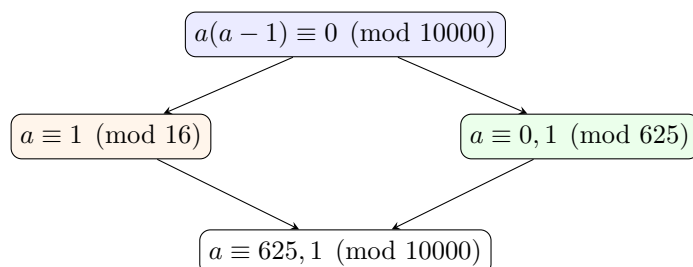
まず $10000 = 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625$ である。また、連続する 2 整数 a と $a-1$ は互いに素であるから、 $a(a-1)$ が $16 \cdot 625$ で割り切れるかどうかは、各素因数のまとまりが a と $a-1$ のどちらに入るかで決まる。 a は奇数なので、 a は 2 で割り切れない。したがって $a(a-1)$ が 16 で割り切れるためには $16 \mid a-1$ でなければならない。すなわち $a \equiv 1 \pmod{16}$ である。

次に 625 について考える。 a と $a-1$ は互いに素であるから、625 は a または $a-1$ のどちらか一方を割り切る。 $625 \mid a-1$ のとき、すでに $16 \mid a-1$ であり、16 と 625 は互いに素なので $10000 \mid a-1$ となる。よって $a \equiv 1 \pmod{10000}$ である。しかし $3 \leq a \leq 9999$ にこの合同式を満たす整数は存在しない。 $625 \mid a$ のとき、 $a = 625k$ とおく。範囲 $3 \leq a \leq 9999$ より $1 \leq k \leq 15$ である。また $625 \equiv 1 \pmod{16}$ だから、 $a \equiv 1 \pmod{16}$ は $k \equiv 1 \pmod{16}$ と同値である。 $1 \leq k \leq 15$ の中でこれを満たすのは $k = 1$ だけである。したがって $a = 625$ を得る。

実際、625 は奇数であり、 $625^2 - 625 = 625 \cdot 624$ は 625 と 16 の両方で割り切れる。16 と 625 は互いに素なので、これは 10000 で割り切れる。よって求める値は 625 である。

条件・検算

連続整数の互いに素性により 5^4 を 2 因子へ分割できない。候補 $a = 1$ は下限 3 により除外される。



▶ 解法 2 (中国剰余定理による整理)

【方針】

$a(a-1) \equiv 0 \pmod{16}$ と $\pmod{625}$ を別々に解き、連続整数の互いに素性から得る 2 組の合同条件を中国剰余定理で統合する。

【解答】

a は奇数だから

$$a(a-1) \equiv 0 \pmod{16}$$

が成り立つためには

$$a \equiv 1 \pmod{16}$$

でなければならない。

一方、 $\gcd(a, a-1) = 1$ なので

$$a(a-1) \equiv 0 \pmod{625}$$

から

$$a \equiv 0 \pmod{625} \quad \text{または} \quad a \equiv 1 \pmod{625}$$

を得る。

後者と $a \equiv 1 \pmod{16}$ を合わせると、中国剰余定理により

$$a \equiv 1 \pmod{10000}.$$

前者では $a = 625k$ とおくと $625 \equiv 1 \pmod{16}$ だから

$$k \equiv 1 \pmod{16},$$

したがって

$$a \equiv 625 \pmod{10000}$$

である。ゆえに全解は

$$a \equiv 1, 625 \pmod{10000}.$$

$3 \leq a \leq 9999$ に入るのは

$$a = 625$$

だけである。

【総評】 難度 5、計算量 3。連続する 2 整数が互いに素であることを使い、 $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ の素因数をどちらの因子に入れるかで処理する整数問題である。目安は 10 分程度で、 a が奇数であるため 2^4 が必ず $a-1$ 側に入る点が最重要である。 $625 \mid a-1$ と $625 \mid a$ の 2 場合を分けたあと、最後に範囲 $3 \leq a \leq 9999$ を使って候補を削る。ありがちなミスは、625 を a と $a-1$ に分けて入れられるように扱ってしまうことと、 $a \equiv 1 \pmod{10000}$ の場合に $a = 1$ を範囲外として落とし忘れることである。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 5 問】

N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ、計 N 枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

- (i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b = 0$ とする。 $a + b > N$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iii) $a + b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a + b < c$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iv) $a + b \geq c$ の場合は、乙はもう 1 回カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a + b < c + d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。
- (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。

▶ 解法 1

【方針】

甲の合計点を S と固定して、乙に手番が渡った後だけを先に数える。 $S \leq N$ なら、乙の 1 枚目 c が $c > S$ のときは即座に乙の勝ちで、 $1 \leq c \leq S$ のときだけ 2 枚目 d を考える。このとき甲が勝つのは $c + d \leq S$ または $c + d > N$ であり、各 c について有利な d が S 通りになる。したがって固定合計 S での甲の勝率は $\frac{S^2}{N^2}$ である。(1) は $S = a$ 、(2) は b ごとに $S = a + b$ として平均する。最後に有利不利を判定するなら、2 つの確率の差の符号を比較する。

【解答】

- (1)
- 甲が 2 回目を引かないとき、合計は a である。乙の 1 枚目を c とすると、 $c > a$ ならその時点で乙が勝つので、甲が勝ち得るのは $1 \leq c \leq a$ の場合だけである。

この c を固定する。乙の 2 枚目を d とすると、甲が勝つのは

$$c + d \leq a \quad \text{または} \quad c + d > N$$

のときである。前者を満たす d は $a - c$ 通り、後者は c 通りで、両者は重ならない。したがって各 c に対して有利な d は a 通り、全体では a^2 組である。よって確率は

$$\frac{a^2}{N^2}.$$

- (2)
- 2 枚目の数を b とする。 $a + b > N$ なら甲は直ちに負ける。 $1 \leq b \leq N - a$ では合計 $S = a + b$ に (1) の数え上げを適用でき、条件付き確率は

$$\frac{(a + b)^2}{N^2}$$

である。したがって求める確率は

$$\frac{1}{N} \sum_{b=1}^{N-a} \frac{(a + b)^2}{N^2} = \frac{1}{N^3} \sum_{k=a+1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)}{6N^3}.$$

なお、2 回目を引く方が有利かどうかは

$$D(a) = \sum_{k=a+1}^N k^2 - Na^2$$

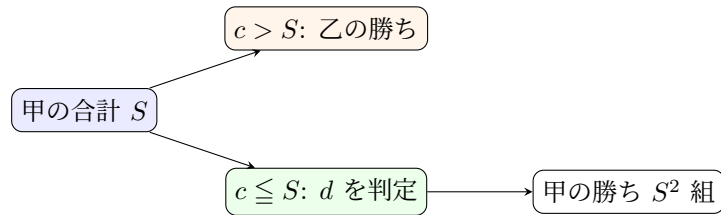
の符号で決まる。さらに

$$D(a+1) - D(a) = -(a+1)^2 - N(2a+1) < 0$$

なので、 a が大きくなるほど 2 回目を引く利点は一方的に小さくなる。

条件・検算

手順 (iii) で終了する場合にも仮想的な d を付ける計数は確率を変えない。(2) では $a + b > N$ の即時敗北を和の範囲で除外する。



▶ 解法 2 (乙の勝ちを余事象で数える)

【方針】

甲の合計 $S \leq N$ を固定し、乙の 1 枚目で即終了する場合にも仮想的な 2 枚目を付けて全 N^2 組を数える。乙の勝ちが $N^2 - S^2$ 組になることから甲の勝率を得る。

【解答】

甲の合計を $S \leq N$ と固定する。 $c > S$ で即終了する場合にも、計数上は仮想的な 2 枚目 d を付ける。この場合の乙の勝ち は $(N - S)N$ 組である。

$1 \leq c \leq S$ では、乙が勝つ条件は $S < c + d \leq N$ であり、各 c に対して d は $N - S$ 通りある。したがって

$$\begin{aligned} \text{乙の勝ち} &= (N - S)N + S(N - S) = N^2 - S^2, \\ \text{甲の勝ち} &= S^2 \end{aligned}$$

となり、固定合計 S での甲の勝率は $\frac{S^2}{N^2}$ である。

(1)

2 回目を引かないときは $S = a$ だから

$$\frac{a^2}{N^2}.$$

(2)

$b > N - a$ なら甲は直ちに負ける。 $1 \leq b \leq N - a$ では $S = a + b$ なので、 b について平均して

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{N} \sum_{b=1}^{N-a} \frac{(a+b)^2}{N^2} \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{k=a+1}^N k^2 \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)}{6N^3}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 7。固定した甲の合計 S に対する勝率を $\frac{S^2}{N^2}$ と数えることが核心である。 $c + d > N$ でも甲が勝つ点と、2 枚目を引く場合は $a + b > N$ を除く点に注意する。最後は $D(a)$ の符号と狭義単調減少性で有利不利を判定する。問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 6 問】

r を正の実数とする。 xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y^2 + z^2 \geq r^2, \quad z^2 + x^2 \leq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

3つの条件はいずれも座標の符号を変えても不変なので、第1八分体で体積を求めて8倍する。また半径 r に関して相似なので、まず $r = 1$ を計算し最後に r^3 倍する。第1八分体では x, y を固定し、 z の上限を $z^2 + x^2 \leq 1$ から、下限を $y^2 + z^2 \geq 1$ から決める。上下限が両立する条件は $y \geq x$ で、さらに $x^2 + y^2 \leq 1$ があるため、 xy 平面の領域は第1象限の単位円内で $y \geq x$ の部分になる。積分を2つに分け、必要なところで積分順序を入れ替えて計算する。

【解答】

まず $r = 1$ の場合を考える。一般の $r > 0$ では、 x, y, z をそれぞれ r 倍する相似変換により長さが r 倍、体積が r^3 倍になる。したがって最後に r^3 を掛ければよい。

3つの条件 $x^2 + y^2 \leq 1$, $y^2 + z^2 \geq 1$, $z^2 + x^2 \leq 1$ はいずれも x, y, z の符号を個別に変えても変わらない。よって第1八分体の体積を V_0 とすると、全体の体積は $8V_0$ である。

第1八分体で $x, y, z \geq 0$ とする。 x, y を固定すると、 $z^2 + x^2 \leq 1$ より $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$ である。また $y^2 + z^2 \geq 1$ より $z \geq \sqrt{1-y^2}$ である。したがって z の長さは $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$ である。ただし、これが0以上でなければならないので $\sqrt{1-y^2} \leq \sqrt{1-x^2}$ すなわち $y \geq x$ が必要十分である。

さらに $x^2 + y^2 \leq 1$ がある。第1象限で $y \geq x$ かつ $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす範囲は $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ である。よって

$$V_0 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}\} dy dx$$

となる。

これを $V_0 = A - B$ と分ける。ただし

$$A = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx$$

および

$$B = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy dx$$

である。

まず

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \{\sqrt{1-x^2} - x\} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-x^2) dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

である。ここで

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{5}{6\sqrt{2}}$$

であり、

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

である。したがって $A = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}$ である。

次に B を計算する。積分領域は $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ である。積分順序を変えると, $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ では $0 \leq x \leq y, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 1$ では $0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ となる。よって

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^y \sqrt{1-y^2} dx dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y \sqrt{1-y^2} dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-y^2) dy \end{aligned}$$

である。各項を計算すると

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y \sqrt{1-y^2} dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

かつ

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-y^2) dy = \frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}$$

だから $B = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

したがって

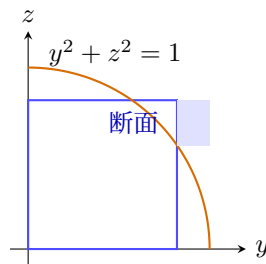
$$V_0 = A - B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} - \frac{4}{3}$$

である。よって $r = 1$ のときの全体の体積は $8V_0 = 8\sqrt{2} - \frac{32}{3}$ である。

以上より, 一般の r に対する体積は $\left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3$ である。

条件・検算

第 1 八分体の断面が存在する範囲と、円柱の内外条件を取り違えない。最後に符号対称の 8 倍と相似比 r^3 を戻す。



▶ 解法 2（正方形断面から求める別解）

【方針】

第 1 八分体で x を固定する。 yz 平面では一辺 $\sqrt{1-x^2}$ の正方形から単位円の内側を除いた部分が断面になる。円弧部分を積分し、二重積分の順序を交換して評価する。

【解答】

相似性から $r = 1$ とし、最後に r^3 倍する。第 1 八分体で x を固定し、 $L = \sqrt{1-x^2}$ とおくと、断面は

$$0 \leq y, z \leq L, \quad y^2 + z^2 \geq 1$$

である。存在条件 $2L^2 \geq 1$ より $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。正方形 $[0, L]^2$ のうち単位四分円の外側を取るの

$$A(x) = L^2 - \frac{\pi}{4} + 2 \int_L^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

したがって第 1 八分体の体積は

$$V_0 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ 1 - x^2 - \frac{\pi}{4} + 2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt \right\} dx.$$

二重積分部分の順序を交換すれば

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt dx \\ &= 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1-t^2} \right) \sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}, \\ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-t^2) dt &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

これらを代入すると π の項が消え、

$$V_0 = \sqrt{2} - \frac{4}{3}.$$

符号対称性で 8 倍し、相似比を戻せば

$$V = 8r^3 V_0 = \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。第 1 八分体で $y \geq x$ を導き、円弧側と正方形側に分けて積分する。積分順序の交換、符号対称性による 8 倍、相似比による r^3 倍までを一続きに検算する。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の関係または答案の論理を確認するための独自作図であり、条件・境界・結論を本文だけでも追えるようにした。