

東京大学 2006 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

四角形 $ABCD$ が、半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で、辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき、残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

半径を $R = \frac{65}{8}$ とし、各辺に対応する中心角の半分の $\alpha, \beta, \beta, \delta$ とおく。 $BC = CD = 13$ から $\sin \beta = \frac{4}{5}$ を求め、周長条件で $AB + DA = 18$ を得る。和積公式から $AB \cdot DA$ も求め、和と積をもつ 2 次方程式へ帰着する。

【解答】

円の半径を $R = \frac{65}{8}$ とする。円の弦の長さは、その弦に対応する中心角を 2φ とすると $2R \sin \varphi$ である。

辺 BC , CD に対応する中心角の半分の β とおく。等しい弦に対応する弧は小弧か大弧であるが、一方が大弧で他方が小弧なら、その 2 弧だけで円周全体を占めてしまう。四角形の残り 2 辺があるので、両方とも小弧であり $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ である。 $BC = CD = 13$ より $13 = 2R \sin \beta = \frac{65}{4} \sin \beta$ である。したがって $\sin \beta = \frac{4}{5}$ であり、 $0 < \beta < \pi/2$ だから $\cos \beta = \frac{3}{5}$ である。

次に、辺 AB , DA に対応する中心角の半分の α, δ とする。4 つの弧で円を一周するので $\alpha + \beta + \beta + \delta = \pi$ すなわち $\alpha + \delta = \pi - 2\beta$ である。よって $\cos(\alpha + \delta) = \cos(\pi - 2\beta) = -\cos 2\beta$ であり、 $\cos 2\beta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$ だから $\cos(\alpha + \delta) = \frac{7}{25}$ である。また

$$\sin(\alpha + \delta) = \sin(2\beta) = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

である。

周の長さが 44 で、 $BC = CD = 13$ だから $AB + DA = 44 - 13 - 13 = 18$ である。一方 $AB = 2R \sin \alpha$, $DA = 2R \sin \delta$ であるから $\frac{65}{4}(\sin \alpha + \sin \delta) = 18$ であり、 $\sin \alpha + \sin \delta = \frac{72}{65}$ となる。

和積公式より

$$\sin \alpha + \sin \delta = 2 \sin \frac{\alpha + \delta}{2} \cos \frac{\alpha - \delta}{2}$$

である。ここで

$$\sin \frac{\alpha + \delta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha + \delta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

である。したがって $2 \cdot \frac{3}{5} \cos \frac{\alpha - \delta}{2} = \frac{72}{65}$ より $\cos \frac{\alpha - \delta}{2} = \frac{12}{13}$ を得る。よって $\cos(\alpha - \delta) = 2 \left(\frac{12}{13}\right)^2 - 1 = \frac{119}{169}$ である。

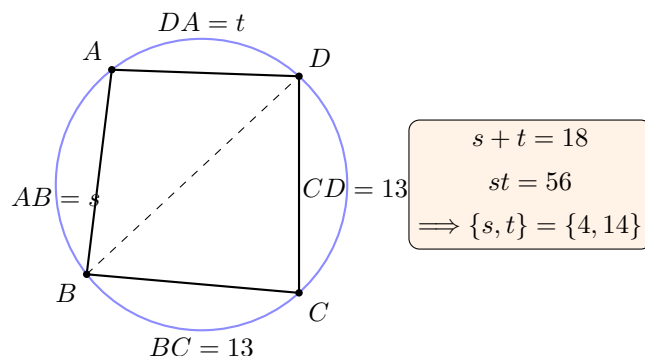
したがって

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \delta &= \frac{\cos(\alpha - \delta) - \cos(\alpha + \delta)}{2} \\ &= \frac{\frac{119}{169} - \frac{7}{25}}{2} \\ &= \frac{896}{4225}\end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned}AB \cdot DA &= (2R)^2 \sin \alpha \sin \delta \\ &= \left(\frac{65}{4}\right)^2 \cdot \frac{896}{4225} \\ &= 56\end{aligned}$$

である。 $AB + DA = 18$, $AB \cdot DA = 56$ だから, AB, DA は 2 次方程式 $t^2 - 18t + 56 = 0$ の 2 解である。よって $(t - 4)(t - 14) = 0$ となり, $AB, DA = 4, 14$ である。どちらが AB でどちらが DA であるかは, 図の取り方を入れ替えると交換される。



弦の条件から和と積をそろえれば, 最後は 2 次方程式に帰着する。

▶ 解法 2 (対角線と余弦定理)

【方針】

対角線 BD を共通弦 $BC = CD = 13$ から求める。三角形 ABD において $AB + DA = 18$ を使い, 余弦定理から積 $AB \cdot DA$ を直接決定する。

【解答】

$BC = CD = 13$ に対応する中心角の半分を β とする。解法 1 と同様に, 両辺は小弧に対応するので $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ である。

$BC = CD = 13$ に対応する半角を β とすると, 対角線 BD は中心角 4β に対応する弦である。したがって $BD = 2R \sin 2\beta = \frac{65}{4} \cdot \frac{24}{25} = \frac{78}{5}$ である。また, $\angle BAD$ は弧 BCD に対する円周角なので $\angle BAD = 2\beta$, $\cos \angle BAD = \cos 2\beta = -\frac{7}{25}$ である。 $AB = s$, $DA = t$ とおくと $s + t = 18$ であり, 三角形 ABD に余弦定理を用いて $\left(\frac{78}{5}\right)^2 = s^2 + t^2 - 2st \left(-\frac{7}{25}\right)$ となる。 $s^2 + t^2 = (s + t)^2 - 2st = 324 - 2st$ を代入すると $\frac{6084}{25} = 324 - \frac{36}{25}st$ であり, $st = 56$ を得る。よって同じく $s, t = 4, 14$ である。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 22 分。弦の長さを中心角の半分で表す標準処理を使うと, 周長条件が $\sin \alpha + \sin \delta$ の条件になる。計算の山は $AB \cdot DA$ を出すところで, 和だけで終わらず積まで整理する必要がある。別解のように対角線 BD と余弦定理を使うと, 積 $AB \cdot DA$ がより直接出る。

【第 2 問】

コンピュータの画面に、記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は、それまでの経過に関係なく、 p であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い、記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に、記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし、記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

- (1) P_2 を p で表せ。
- (2) P_3 を p で表せ。
- (3) $n \geq 4$ のとき、 P_n を p と n で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

最初の×はすでに 1 個数えられているので、○が n 個出るまでに追加で出てよい×は 0 個または 1 個だけである。停止時の最後の記号は必ず○である。したがって、追加の×がない場合、最初の操作で追加の×が出る場合、いったん○が出た後に追加の×が 1 回だけ出る場合に分ける。一般式はこの数え上げを n に拡張すればよい。

【解答】

(1)

最初に×が 1 個表示されている。×が合計 3 個出る前に○が 2 個出ればよいので、操作後の列として許されるものは

$$\times \circ \circ, \quad \times \times \circ \circ, \quad \times \circ \times \circ$$

である。

それぞれの確率を求める。最初の列は、×から○へ変わり、次に○が続くので $(1-p)p$ である。2 番目の列は $p(1-p)p$ である。3 番目の列は、毎回前と異なる記号に変わるので $(1-p)^3$ である。したがって

$$\begin{aligned} P_2 &= (1-p)p + p(1-p)p + (1-p)^3 \\ &= (1-p)(2p^2 - p + 1) \end{aligned}$$

である。

(2) ○が 3 個出る前に、追加で出てよい×は高々 1 個である。

追加の×が出ない場合、列は×○○であり、確率は $(1-p)p^2$ である。

追加の×が最初の操作で出る場合、列は××○○であり、確率は $p(1-p)p^2$ である。

追加の×が、少なくとも 1 個の○が出た後に現れる場合を考える。この×は、1 個目の○の後、または 2 個目の○の後に入るので 2 通りである。どちらの場合も、×から○へ変わる、途中で○から×へ変わる、さらに×から○へ変わる、という 3 回の変化があり、残り 1 回は○が続く。したがって各確率は $(1-p)^3p$ である。よって

$$\begin{aligned} P_3 &= (1-p)p^2 + p(1-p)p^2 + 2(1-p)^3p \\ &= p(1-p)(3p^2 - 3p + 2) \end{aligned}$$

である。

(3) $n \geq 4$ とする。追加の×がない場合、最初に×から○へ変わり、その後○が $n-1$ 回続くので、確率は $(1-p)p^{n-1}$ である。

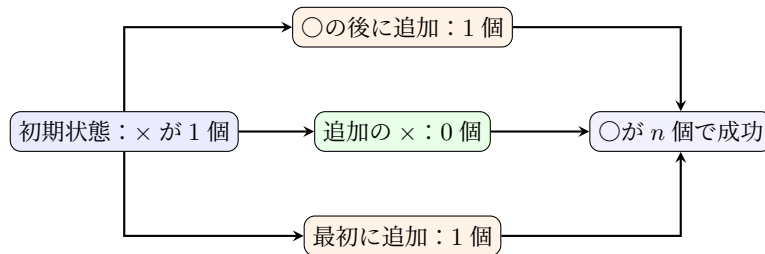
追加の×が最初の操作で出る場合、最初に×が続く、次に○へ変わり、その後○が $n-1$ 回続くので、確率は $p(1-p)p^{n-1}$ である。

最後に、少なくとも 1 個の○が出た後に追加の×が 1 回だけ出る場合を考える。この追加の×は、1 個目の○の後から $(n-1)$ 個目の○の後までのいずれかに入るので、位置は $n-1$ 通りである。どの位置でも、記号が変わる回数は 3 回で、○が続く回数は $n-2$ 回である。したがって各確率は $(1-p)^3p^{n-2}$ である。

以上より

$$\begin{aligned} P_n &= (1-p)p^{n-1} + p(1-p)p^{n-1} + (n-1)(1-p)^3p^{n-2} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{p + p^2 + (n-1)(1-p)^2\} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{np^2 - (2n-3)p + n-1\} \end{aligned}$$

である。



3 個目の × が出ると失敗するため、成功経路はこの 3 型だけである。

▶ 解法 2 (2 状態の漸化式)

【方針】

○が k 個出た直後を, 追加の × が 0 個の状態 A_k と, 1 個の状態 B_k に分ける. 遷移は $A_{k+1} = pA_k$, $B_{k+1} = pB_k + (1-p)^2 A_k$ である. この 2 状態漸化式を解いて $P_n = A_n + B_n$ を求める.

【解答】

状態の定義

k 個目の ○ が出た直後について,

A_k = 追加の × がまだ 0 個である確率,

B_k = 追加の × がちょうど 1 個である確率

とおく. どちらも最後の記号は ○ である. 最初の × から 1 個目の ○ へ移る経路を考えると

$$A_1 = 1 - p, \quad B_1 = p(1 - p)$$

である.

A_k から追加の × を出さずに次の ○ へ進む確率は p である. また, A_k から ○, ×, ○ と移って追加の × を 1 個使う確率は $(1-p)^2$ である. B_k からは × をもう出せないで, ○ を続ける確率 p だけが許される. したがって

$$A_{k+1} = pA_k, \quad B_{k+1} = pB_k + (1-p)^2 A_k$$

を得る.

第 1 式から

$$A_n = (1-p)p^{n-1}$$

である. 第 2 式を順に展開すると

$$\begin{aligned} B_n &= p^{n-1}B_1 + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{n-1} p^{n-1-j} A_j \\ &= p^n(1-p) + (n-1)(1-p)^3 p^{n-2}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} P_n &= A_n + B_n = (1-p)p^{n-2}\{p + p^2 + (n-1)(1-p)^2\} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{np^2 - (2n-3)p + n-1\}. \end{aligned}$$

(1) $n = 2$ を代入すると

$$P_2 = (1-p)(2p^2 - p + 1)$$

である.

(2) $n = 3$ を代入すると

$$P_3 = p(1-p)(3p^2 - 3p + 2)$$

である.

(3) $n \geq 4$ では, 上で得た一般式

$$P_n = (1-p)p^{n-2}\{np^2 - (2n-3)p + n-1\}$$

が求める答えである.

【総評】 難度 7, 計算量 6. 目安時間は 26 分. ポイントは「最初の $\times$ を含めて 3 個より前」という条件を, 追加で許される $\times$ は高々 1 個, と読み替えることにある. 追加の $\times$ が最初に出る場合と, $\circ$ の後に出る場合では確率の形が異なる. 一般式では位置の数 $n-1$ と, 続く回数 $n-2$ を混同しないことが重要である.

【第 3 問】

n を正の整数とする. 実数 x, y, z に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \quad (*)$$

を考える.

- (1) $n = 1$ のとき, $(*)$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) で, $x \leq y \leq z$ となるものをすべて求めよ.
- (2) $n = 3$ のとき, $(*)$ を満たす正の実数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ.

【方針】

(1) では $x + y + z = xyz$ を $x \leq y \leq z$ の順序条件で絞る. $x = 1$ は因数分解で解け, $x = 2$ は不等式で排除する. $x \geq 3$ では $y, z \geq x$ を使い, 右辺 xyz が左辺 $x + y + z$ より大きくなることを示す. (2) は相加相乗平均により $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ と評価すれば, 方程式の右辺 xyz と矛盾する.

【解答】

(1) $n = 1$ のとき, 方程式は $x + y + z = xyz$ である. x, y, z は正の整数で, $x \leq y \leq z$ とする.

まず $x = 1$ の場合を考える. このとき $1 + y + z = yz$ であるから $yz - y - z = 1$ となる. 両辺に 1 を加えて $(y-1)(z-1) = 2$ である. $y \leq z$ なので, 正の整数解は $y-1 = 1, z-1 = 2$ だけであり, $(y, z) = (2, 3)$ である. したがって $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ を得る.

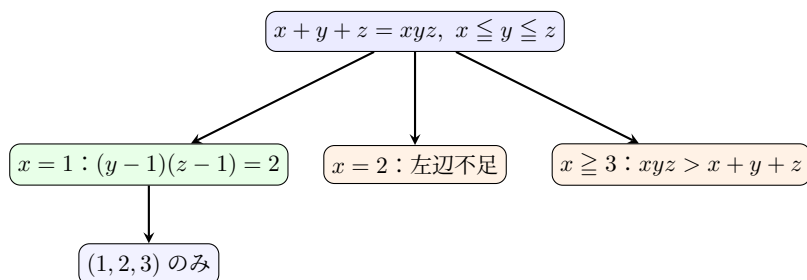
次に $x = 2$ の場合を考える. このとき $y, z \geq 2$ であり, 方程式は $2 + y + z = 2yz$ である. 条件 $y, z \geq 2$ を用いると $2yz - (2 + y + z) = 2yz - y - z - 2$ である. $y, z \geq 2$ だから $2yz - y - z - 2 \geq 4z - 2 - z - 2 = 3z - 4 > 0$ である. したがって $2yz > 2 + y + z$ となり, 方程式は成り立たない.

最後に $x \geq 3$ の場合を考える. このとき $y \geq x \geq 3$ である. $z \geq y \geq x$ なので $x + y + z \leq 3z$ である. 一方 $xyz \geq 9z > 3z$ である. したがって $xyz > x + y + z$ となり, 方程式は成り立たない.

以上より, 求める組は $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ だけである.

(2) x, y, z を正の実数とする. 相加相乗平均より $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = xyz$ である. したがって $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ である.

もし $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$ が成り立つなら, これと上の不等式から $xyz \geq 3xyz$ となる. しかし x, y, z は正の実数なので $xyz > 0$ であり, これは不可能である. よって $n = 3$ のとき, 正の実数の組 (x, y, z) は存在しないである.



【総評】 難度 6, 計算量 4. 目安時間は 18 分. (1) は小さい変数 x から順に絞ると早く終わる. $x = 1$ の因数分解, $x = 2$ の排除, $x \geq 3$ の大小比較を分けて書くと漏れがない. (2) は相加相乗平均の一撃だが, $xyz > 0$ だから $xyz \geq 3xyz$ が矛盾する, という最後の一文まで必要である.

【第 4 問】

θ は、 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ の範囲の角度を表す定数とする． $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で、関数

$$f(x) = |x+1|^3 + |x - \cos 2\theta|^3 + |x-1|^3$$

が最小値をとるときの変数 x の値を、 $\cos \theta$ で表せ．

【方針】

$a = \cos 2\theta$ とおくと、 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ より $0 < a < 1$ である．区間 $[-1, 1]$ では $|x+1| = x+1$ 、 $|x-1| = 1-x$ と外せるので、残る $|x-a|$ によって $[-1, a]$ と $[a, 1]$ に分ける．各区間で微分し、 $[a, 1]$ では増加、 $[-1, a]$ では導関数の符号が 1 回だけ変わることを示す．最後に $a = 2\cos^2 \theta - 1$ を代入して $\cos \theta$ だけで表す．

【解答】

$a = \cos 2\theta$ とおく． $0^\circ < \theta < 45^\circ$ より $0 < 2\theta < 90^\circ$ であるから $0 < a < 1$ である． $-1 \leq x \leq 1$ では $|x+1| = x+1$ 、 $|x-1| = 1-x$ である．したがって、 $|x-a|$ の符号だけで場合分けすればよい．

まず $a \leq x \leq 1$ の場合、 $f(x) = (x+1)^3 + (x-a)^3 + (1-x)^3$ である．微分すると

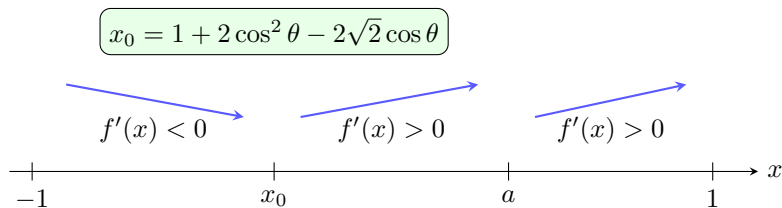
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x+1)^2 + 3(x-a)^2 - 3(1-x)^2 \\ &= 3\{(x+1)^2 - (1-x)^2 + (x-a)^2\} \\ &= 3\{4x + (x-a)^2\} \end{aligned}$$

である．ここで $x \geq a > 0$ だから $f'(x) > 0$ であり、この区間では $f(x)$ は増加する．したがって最小点はこの区間の内部にはない．

次に $-1 \leq x \leq a$ の場合、 $f(x) = (x+1)^3 + (a-x)^3 + (1-x)^3$ である．微分すると $f'(x) = 3(x+1)^2 - 3(a-x)^2 - 3(1-x)^2$ である． $f'(x) = 0$ は $(x+1)^2 - (a-x)^2 - (1-x)^2 = 0$ すなわち $x^2 - (4+2a)x + a^2 = 0$ と同値である．この 2 次方程式の解は $x = 2 + a \pm 2\sqrt{1+a}$ である．

このうち $x_0 = 2 + a - 2\sqrt{1+a}$ を考える． $s = \sqrt{1+a}$ とおくと $1 < s < \sqrt{2}$ であり、 $x_0 = 1 + s^2 - 2s = (s-1)^2$ である．したがって $-1 < x_0$ であり、さらに $a - x_0 = (s^2 - 1) - (s-1)^2 = 2(s-1) > 0$ なので $x_0 < a$ である．よって x_0 は $[-1, a]$ に入る．一方、もう一つの解 $2 + a + 2\sqrt{1+a}$ は明らかに a より大きい． $-1 \leq x \leq a$ では、 $f'(x)$ の符号は x_0 の前で負、後で正となる．したがって $f(x)$ は x_0 で最小値をとる． $[a, 1]$ では増加するので、全体の最小点もこの x_0 である．

最後に $a = \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ を代入する．すると $\sqrt{1+a} = \sqrt{2\cos^2 \theta} = \sqrt{2}\cos \theta$ である． $0 < \theta < 45^\circ$ なので $\cos \theta > 0$ を用いた．よって求める x は $x = 1 + 2\cos^2 \theta - 2\sqrt{2}\cos \theta$ である．



【総評】 難度 6，計算量 5．目安時間は 22 分．絶対値を外す境目が $-1, a, 1$ の順に並ぶことを、 $0 < a < 1$ から確認するのが第一歩である． $[a, 1]$ で増加することを示せば、候補は $[-1, a]$ の 2 次方程式の小さい解に絞られる．最後の指定は $\cos \theta$ で表すことなので、 $\sqrt{1+\cos 2\theta} = \sqrt{2}\cos \theta$ の符号確認を忘れない．