

入 学 試 験 問 題

数 学



東京大学 2006 年度理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示

$$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = t + 2t^2 \end{cases}$$

で表される曲線を C とする. 次の問に答えよ.

- (1) $t \neq -1$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を t の式で表せ.
- (2) 曲線 C 上で $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ を満たす点 A の座標を求めよ.
- (3) 曲線 C 上の点 (x, y) を点 (X, Y) に移す移動が

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y), \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \end{cases}$$

で表されているとする. このとき Y を X を用いて表せ.

- (4) 曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

第 2 問

a を正の実数, θ を

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数とする. xyz 空間において, 点 $(a, 0, 0)$ と点 $(a + \cos \theta, 0, \sin \theta)$ を結ぶ線分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする. さらに, S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする.

次の問に答えよ.

- (1) V を a と θ を用いて表せ.
- (2) $a = 4$ とする. V を θ の関数と考えて, V の最大値を求めよ.

第 3 問

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

などについて、次のような一般的な考察をしてみよう. p, n を自然数とする.

(1) $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって、数列の和

$$\sum_{k=1}^n k^p$$

が $S_p(n)$ と表されることを示せ.

(2) q を自然数とする. (1) の多項式 $S_1(x), S_3(x), \dots, S_{2q-1}(x)$ に対して,

$$\sum_{j=1}^q a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q$$

が恒等式となるような定数 $a_1, \dots, a_q$ を q を用いて表せ.

(3) q を 2 以上の自然数とする. (1) の多項式 $S_2(x), S_4(x), \dots, S_{2q-2}(x)$ に対して,

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$

が恒等式となるような定数 c と $b_1, \dots, b_{q-1}$ を q を用いて表せ.

(4) p を 3 以上の奇数とする. このとき,

$$\frac{d}{dx} S_p(x) = p S_{p-1}(x)$$

を示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)