

東京大学 2006 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示

$$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = t + 2t^2 \end{cases}$$

で表される曲線を C とする。次の問に答えよ。

- (1) $t \neq -1$ のとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。
- (2) 曲線 C 上で $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ を満たす点 A の座標を求めよ。
- (3) 曲線 C 上の点 (x, y) を点 (X, Y) に移す移動が

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y), \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \end{cases}$$

で表されているとする。このとき Y を X を用いて表せ。

- (4) 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

【方針】

(1)(2) は媒介変数の微分を使う。(3) は変換式へ媒介表示を代入すると X が t の 1 次式になるので消去できる。この変換は回転であり、 XY 平面では縦軸方向に開く放物線になる。(4) は頂点、軸、原点などの通過点を元の xy 平面へ戻して描く。

【解答】

(1)

$$\frac{dx}{dt} = 2 + 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + 4t$$

だから、 $t \neq -1$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t + 1}{2t + 2}.$$

(2) 条件は

$$\frac{4t + 1}{2t + 2} = -\frac{1}{2}$$

である。これを解くと $t = -2/5$ となる。よって

$$A = \left(2 \left(-\frac{2}{5} \right) + \frac{4}{25}, -\frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{4}{25} \right) = \left(-\frac{16}{25}, -\frac{2}{25} \right).$$

(3) 媒介表示を変換式へ代入すると

$$\begin{aligned} X &= \frac{2(2t + t^2) - (t + 2t^2)}{\sqrt{5}} = \frac{3t}{\sqrt{5}}, \\ Y &= \frac{(2t + t^2) + 2(t + 2t^2)}{\sqrt{5}} = \frac{4t + 5t^2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

したがって $t = \sqrt{5}X/3$ を消去して

$$Y = \frac{5\sqrt{5}}{9}X^2 + \frac{4}{3}X.$$

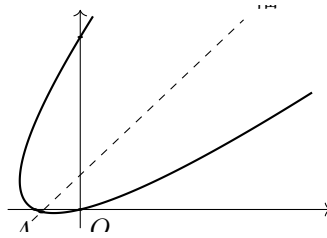
(4) (3) の座標変換は回転であり、得られた式は放物線である。平方完成すると

$$Y + \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{9} \left(X + \frac{6}{5\sqrt{5}} \right)^2.$$

よって頂点を元の座標へ戻すと (2) の点 $A = (-16/25, -2/25)$ となる。軸は方向ベクトル $(1, 2)$ をもち、方程式は

$$y = 2x + \frac{6}{5}$$

である。また $t = 0$ で原点、 $t = -1/2$ で $(-3/4, 0)$ 、 $t = -2$ で $(0, 6)$ を通る。したがって概形は次の通りである。



座標回転により軸方向を見抜き、頂点と通過点を元の座標へ戻して概形を確定する。

【総評】 難度 4、計算量 5。想定時間は 18 分程度で、完答目標の問題である。座標変換へ媒介式をそのまま代入すると 2 次項が消えて $X = 3t/\sqrt{5}$ となる点が差のつく整理である。概形では頂点だけでなく軸の向きと原点などの通過点も示し、放物線の開く方向を確定させたい。

【第 2 問】

a を正の実数、 θ を

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数とする。xyz 空間において、点 $(a, 0, 0)$ と点 $(a + \cos \theta, 0, \sin \theta)$ を結ぶ線分を、 x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする。さらに、 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

次の間に答えよ。

- (1) V を a と θ を用いて表せ。
- (2) $a = 4$ とする。 V を θ の関数と考えて、 V の最大値を求めよ。

【方針】

(1) は最終的な立体を y 軸に垂直な平面で切る。高さ y を固定し、元の線分上の比を s とすると、 y 軸からの距離は s とともに増える。最小・最大の s から断面の内半径と外半径を出し、環状断面を積分する。(2) は得られた三角関数を区間上で微分する。

【解答】

(1) まず $0 < \theta \leq \pi/2$ とする。もとの線分上の位置を $0 \leq s \leq 1$ で表すと、これを x 軸のまわりに回した点は

$$x = a + s \cos \theta, \quad y^2 + z^2 = s^2 \sin^2 \theta$$

を満たす。

高さ $y \geq 0$ を固定すると、 $y \leq \sin \theta$ の範囲で

$$\frac{y}{\sin \theta} \leq s \leq 1.$$

この点の y 軸からの距離を ρ とすれば

$$\rho^2 = x^2 + z^2 = a^2 + 2as \cos \theta + s^2 - y^2.$$

右辺は s とともに増加する。したがって回転後の断面の内半径と外半径は

$$\rho_{\min} = a + y \cot \theta, \quad \rho_{\max} = \sqrt{a^2 + 2a \cos \theta + 1 - y^2}$$

である。上下対称性を用いると

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\sin \theta} \left\{ a^2 + 2a \cos \theta + 1 - y^2 - (a + y \cot \theta)^2 \right\} dy \\ &= 2\pi \int_0^{\sin \theta} \left(1 + 2a \cos \theta - \frac{2a \cos \theta}{\sin \theta} y - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} \right) dy \\ &= 2\pi \sin \theta \left(a \cos \theta + \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

$\theta = 0$ では体積は 0 であり、この公式の値とも一致する。よって

$$V = 2\pi \sin \theta \left(a \cos \theta + \frac{2}{3} \right).$$

(2) $a = 4$ とする。 $V/(2\pi)$ を微分すると

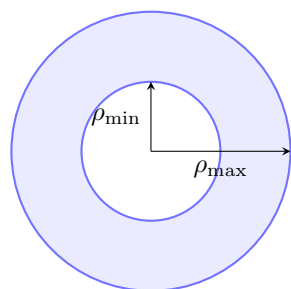
$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \sin \theta \left(4 \cos \theta + \frac{2}{3} \right) \right\} = 4 \cos 2\theta + \frac{2}{3} \cos \theta.$$

これが 0 となる条件は

$$12 \cos^2 \theta + \cos \theta - 6 = 0.$$

$0 \leq \cos \theta \leq 1$ より $\cos \theta = 2/3$ 、 $\sin \theta = \sqrt{5}/3$ を得る。両端の値とも比較すると、このとき最大である。したがって

$$V_{\max} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \left(4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{20\pi\sqrt{5}}{9}.$$



$$\begin{aligned} \rho_{\min} &= a + y \cot \theta \\ \rho_{\max}^2 &= a^2 + 2a \cos \theta + 1 - y^2 \\ \text{断面積} &= \pi(\rho_{\max}^2 - \rho_{\min}^2) \end{aligned}$$

高さ y における環状断面

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 30 分程度で、難問として扱うべき問題である。差がつくのは、二重回転を追いかける代わりに高さ y の環状断面を作り、内外半径を s の端点から求める発想である。完答が厳しい場合も、 $\rho^2 = a^2 + 2as \cos \theta + s^2 - y^2$ と断面積の設定まで書けば有力な部分点になる。

【第 3 問】

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

 などについて、次のような一般的な考察をしてみよう． p, n を自然数とする．

 (1) $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって、数列の和

$$\sum_{k=1}^n k^p$$

 が $S_p(n)$ と表されることを示せ．

 (2) q を自然数とする．(1) の多項式 $S_1(x), S_3(x), \dots, S_{2q-1}(x)$ に対して、

$$\sum_{j=1}^q a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q$$

 が恒等式となるような定数 $a_1, \dots, a_q$ を q を用いて表せ．

 (3) q を 2 以上の自然数とする．(1) の多項式 $S_2(x), S_4(x), \dots, S_{2q-2}(x)$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$

 が恒等式となるような定数 c と $b_1, \dots, b_{q-1}$ を q を用いて表せ．

 (4) p を 3 以上の奇数とする．このとき、

$$\frac{d}{dx} S_p(x) = p S_{p-1}(x)$$

を示せ．

【方針】

 (1) は二項定理で n^p を $(n+1)^{p+1} - n^{p+1}$ と低い次数のべきに分け、 p に関する帰納法で示す．(2)(3) は x の式から $x-1$ の式を引き、 $S_r(x) - S_r(x-1) = x^r$ を使って係数比較する．(3)(4) では $S_r(-x-1) = (-1)^{r+1} S_r(x)$ という対称性も使う．

【解答】

 以下、組合せ数は範囲外の添字に対して ${}_N C_k = 0$ と約束する．

 (1) $p=1$ では

$$S_1(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

 とすればよい． $1, 2, \dots, p-1$ 乗の和がそれぞれ次数 $2, 3, \dots, p$ の多項式で表されると仮定する．二項定理から

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = (p+1)n^p + \sum_{j=0}^{p-1} {}_{p+1}C_j n^j.$$

 これを $n=1, \dots, N$ について加えると

$$\sum_{n=1}^N n^p = \frac{(N+1)^{p+1} - 1}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p-1} {}_{p+1}C_j \sum_{n=1}^N n^j.$$

 右辺は帰納法の仮定により N の多項式であり、最高次項は $N^{p+1}/(p+1)$ だから次数は $p+1$ である．よって所望の多項式 $S_p(x)$ が存在する．また、自然数で成り立つ等式を多項式の恒等式として見ることにより

$$S_p(x) - S_p(x-1) = x^p, \quad S_p(0) = 0$$

が成り立つ．

(2) 求める恒等式から x を $x-1$ に替えたものを引くと

$$\sum_{j=1}^q a_j x^{2j-1} = x^q \{(x+1)^q - (x-1)^q\}.$$

二項定理により右辺は

$$2 \sum_{\substack{0 \leq k \leq q \\ k \text{ が奇数}}} {}_q C_k x^{2q-k}.$$

x^{2j-1} の係数を比較すると

$$a_j = 2 {}_q C_{2j-q-1} \quad (j = 1, \dots, q).$$

逆にこの係数を選べば、両辺の x と $x-1$ における差が一致する。両辺は $x=0$ で 0 だから、元の恒等式も成り立つ。

(3) まず一般に

$$S_r(-x-1) = (-1)^{r+1} S_r(x)$$

が成り立つ。実際、右辺の多項式と左辺の多項式は、ともに隣り合う値の差が $(-1)^{r+1} x^r$ となり、 $x=0$ で 0 となるので一致する。

したがって各 $S_{2j}(x)$ は $x = -1/2$ に関して符号を変える。(3) の右辺でも同じことが必要である。因子 $x^{q-1}(x+1)^{q-1}$ は $x \mapsto -x-1$ で変わらないから

$$-cx - c + q = -(cx + q)$$

でなければならない。よって

$$c = 2q.$$

この値を用い、(2) と同様に x と $x-1$ における差をとると

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q-1} b_j x^{2j} &= qx^{q-1} \{(2x+1)(x+1)^{q-1} - (2x-1)(x-1)^{q-1}\} \\ &= q \left\{ 4 \sum_{\substack{0 \leq k \leq q-1 \\ k \text{ が奇数}}} {}_{q-1} C_k x^{2q-1-k} + 2 \sum_{\substack{0 \leq k \leq q-1 \\ k \text{ が偶数}}} {}_{q-1} C_k x^{2q-2-k} \right\}. \end{aligned}$$

係数比較により

$$b_j = 2q \{2 {}_{q-1} C_{2j-q} + {}_{q-1} C_{2j-q+1}\} \quad (j = 1, \dots, q-1).$$

この係数なら差が一致し、両辺は $x=0$ で 0 だから、十分性も成り立つ。

(4)

$$D(x) = S'_p(x) - pS_{p-1}(x)$$

とおく。 $S_p(x) - S_p(x-1) = x^p$ を微分した式と、 $S_{p-1}(x) - S_{p-1}(x-1) = x^{p-1}$ の p 倍を比較すると

$$D(x) - D(x-1) = 0.$$

したがって多項式 $D(x)$ は定数である。

p は奇数なので、上で示した対称性から $S_p(x)$ は $x = -1/2$ に関して対称であり

$$S'_p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

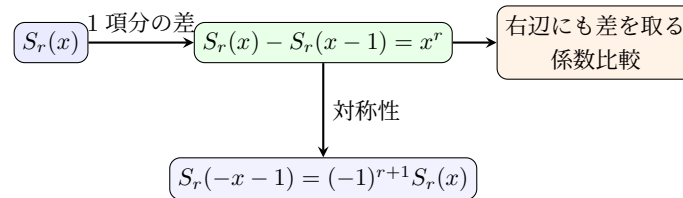
一方、 $p-1$ は偶数なので $S_{p-1}(x)$ は同じ点に関して符号を変え

$$S_{p-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

よって $D(-1/2) = 0$ であり、定数多項式 D は恒等的に 0 である。したがって

$$S'_p(x) = pS_{p-1}(x)$$

が示された。



【総評】 難度 9, 計算量 8. 目安時間は 45 分以上. 後期 3 問の中でも最難関であり, 完答だけを狙って時間を使い切らない判断も重要である. 全小問を貫く核は

$$S_r(x) - S_r(x-1) = x^r$$

という有限差分である. (1) でこの恒等式を準備し, (2)(3) では求める恒等式の両辺に同じ差を取って係数比較へ落とす. 差が一致するだけで終わらず, 差を取った両辺の差が周期 1 の多項式, したがって定数であり, $x=0$ で 0 になることまで書けば十分性も明確になる.

(3) の $c=2q$ は, $x \mapsto -x-1$ に対する偶奇性から先に決めると展開量を減らせる. 二項係数の添字が範囲外なら 0 とする約束を明示し, x^{2j} の指数と添字を逆算するのが安全である. (4) では $D(x) = S'_p(x) - pS_{p-1}(x)$ が定数であることと, p が奇数であるため $x=-1/2$ で両項が 0 になることを分けて示す. 得点戦略としては, まず (1) を確保し, 次に (2) の差分と係数, (3) の $c=2q$, 最後に (4) の順で積み上げると部分点を残しやすい.