

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 2006 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

O を原点とする座標平面上の 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 で、条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_{n+1}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n} \quad (n = 2, 3)$$

を満たすものを考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) P_1, P_2 が曲線 $xy = 1$ 上にあるとき、 P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。
- (2) P_1, P_2, P_3 が円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるとき、 P_4 もこの円周上にあることを示せ。

第 2 問

コンピュータの画面に、記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は、それまでの経過に関係なく、 p であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い、記号×が最初のものも含めて3個出るよりも前に、記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし、記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

- (1) P_2 を p で表せ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 P_n を p と n で表せ。

第 3 問

O を原点とする座標平面上に、 y 軸上の点 $P(0, p)$ と直線 $m : y = (\tan \theta)x$ が与えられている。
ここで、 $p > 1$,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

とする。

いま、傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと、原点 O は直線 $y = 1$ 上の、第 1 象限の点 Q に移り、 y 軸上の点 P は直線 m 上の、第 1 象限の点 R に移った。

(1) このとき、 $\tan \theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し、そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような θ

$$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

に対しても、原点を通り直線 l に垂直な直線は

$$y = \left(\tan \frac{\theta}{3}\right)x$$

となる。

第 4 問

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える.

条件 (A) : x, y, z は正の整数で,

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

および $x \leq y \leq z$ を満たす.

以下の問いに答えよ.

- (1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で, $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ.
- (2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする. このとき, 組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ.
- (3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は, 無数に存在することを示せ.

第 5 問

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

とおく． $n > 1$ のとき， $b_n > 2n$ となることを示せ．

(2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$$

第 6 問

$x > 0$ を定義域とする関数

$$f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は、実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ. すなわち、任意の実数 a に対して、 $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在することを示せ.
- (2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y = g(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする. このとき、次の定積分を求めよ.

$$\int_8^{27} g(x) dx$$

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)