

東京大学 2006 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

O を原点とする座標平面上の 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 で、条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_{n+1}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n} \quad (n = 2, 3)$$

を満たすものを考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) P_1, P_2 が曲線 $xy = 1$ 上にあるとき、 P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。
- (2) P_1, P_2, P_3 が円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるとき、 P_4 もこの円周上にあることを示せ。

【方針】

位置ベクトルを $\mathbf{p}_n = \overrightarrow{OP_n}$ と書くと、条件は $\mathbf{p}_{n+1} = \frac{3}{2}\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$ である。(1) は $P_1 = (a, 1/a), P_2 = (b, 1/b)$ とおき、 P_3 の座標積が 1 にならないことを計算で示す。(2) は座標計算より内積が有効で、 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_3| = 1$ と $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = \frac{3}{2}\mathbf{p}_2$ から必要な内積を求め、 $|\mathbf{p}_4| = 1$ を示す。

【解答】

(1) $P_1 = \left(a, \frac{1}{a}\right), \quad P_2 = \left(b, \frac{1}{b}\right)$ とおく。ただし $a, b \neq 0$ である。条件を $n = 2$ に対して用いると

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}$$

であるから

$$\overrightarrow{OP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

である。したがって $P_3 = \left(\frac{3}{2}b - a, \frac{3}{2b} - \frac{1}{a}\right)$ である。

この点が曲線 $xy = 1$ 上にあるかどうかを調べる。座標の積は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2}b - a\right) \left(\frac{3}{2b} - \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{9}{4} - \frac{3b}{2a} - \frac{3a}{2b} + 1 \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2}b - a\right) \left(\frac{3}{2b} - \frac{1}{a}\right) - 1 \\ &= \frac{9}{4} - \frac{3b}{2a} - \frac{3a}{2b} \\ &= -\frac{3(2a^2 - 3ab + 2b^2)}{4ab} \end{aligned}$$

である。ここで

$$2a^2 - 3ab + 2b^2 = 2\left(a - \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{8}b^2 > 0$$

である。よって上の値は 0 ではない。したがって $\left(\frac{3}{2}b - a\right) \left(\frac{3}{2b} - \frac{1}{a}\right) \neq 1$ であり、 P_3 は曲線 $xy = 1$ 上にはない。

(2)

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OP_2}, \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{OP_3}$$

とおく。仮定より $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 1$ である。また条件から $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \frac{3}{2}\mathbf{v}$ である。両辺の長さの 2 乗を比べると

$$|\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 = \left|\frac{3}{2}\mathbf{v}\right|^2 \quad \text{なので} \quad 1 + 1 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \frac{9}{4} \quad \text{となる。よって} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{8} \quad \text{である。}$$

また $v = \frac{2}{3}(u + w)$ であるから

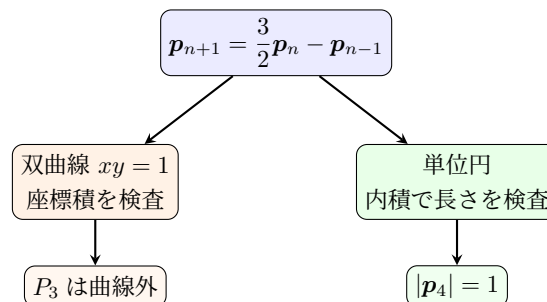
$$v \cdot w = \frac{2}{3}(u \cdot w + |w|^2) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8} + 1\right) = \frac{3}{4}$$

である。

条件を $n = 3$ に対して用いると $v + \overrightarrow{OP_4} = \frac{3}{2}w$ なので $\overrightarrow{OP_4} = \frac{3}{2}w - v$ である。したがって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP_4}|^2 &= \left| \frac{3}{2}w - v \right|^2 \\ &= \frac{9}{4}|w|^2 + |v|^2 - 3v \cdot w \\ &= \frac{9}{4} + 1 - 3 \cdot \frac{3}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。よって P_4 も円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあることが示された。



【総評】 難度 5, 計算量 4. 目安時間は 20 分。同じ一次漸化式でも、双曲線では座標積が保たれず、円では内積計算により長さが保たれる、という対比を見せる問題である。(1) は $a, b \neq 0$ として座標積を最後まで計算する。(2) は座標を置くより、単位ベクトルの内積を順に求める方が簡潔でミスが少ない。

【第 2 問】

コンピュータの画面に、記号 $\circ$ と $\times$ のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は、それまでの経過に関係なく、 p であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号 $\times$ が表示された。操作をくり返し行い、記号 $\times$ が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に、記号 $\circ$ が n 個出る確率を P_n とする。ただし、記号 $\circ$ が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) $n \geq 3$ のとき、 P_n を p と n で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

文科第 2 問と同じ状況である。最初の $\times$ を含めて 3 個出る前に成功するには、追加の $\times$ は 0 個または 1 個しか許されない。停止時の最後の記号は $\circ$ なので、追加の $\times$ がない場合、最初に追加の $\times$ が出る場合、 $\circ$ が出た後に追加の $\times$ が 1 回だけ出る場合に分ける。理科版では一般式を $n \geq 3$ としてまとめる。

【解答】

(1)

最初に $\times$ が 1 個表示されているので、 $\circ$ が 2 個出るまでに追加で出てよい $\times$ は高々 1 個である。成功する列は

$$\times \circ \circ, \quad \times \times \circ \circ, \quad \times \circ \times \circ$$

である。それぞれの確率は $(1-p)p$, $p(1-p)p$, $(1-p)^3$ である。したがって

$$\begin{aligned} P_2 &= (1-p)p + p(1-p)p + (1-p)^3 \\ &= (1-p)(2p^2 - p + 1) \end{aligned}$$

である。

(2) $n \geq 3$ とする。追加の $\times$ が無い場合、列は $\times \circ \circ \cdots \circ$ であり、確率は $(1-p)p^{n-1}$ である。

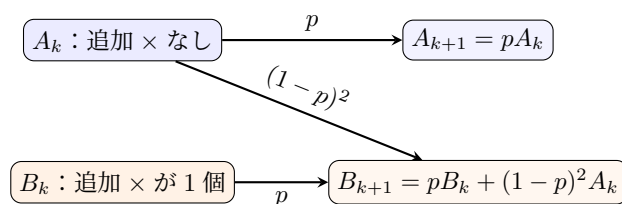
追加の $\times$ が最初の操作で出る場合、最初に $\times$ が続き、その後 $\circ$ に変わって n 個の $\circ$ がそろふ。確率は $p(1-p)p^{n-1}$ である。

追加の $\times$ が、少なくとも 1 個の $\circ$ が出た後に現れる場合を考える。この $\times$ は、1 個目の $\circ$ の後から $(n-1)$ 個目の $\circ$ の後までのいずれかに入る。したがって位置は $n-1$ 通りである。どの位置でも、 $\times \rightarrow \circ$, $\circ \rightarrow \times$, $\times \rightarrow \circ$ という 3 回の变化があり、残りの $n-2$ 回は $\circ$ が続く。よって各確率は $(1-p)^3 p^{n-2}$ である。

以上より

$$\begin{aligned} P_n &= (1-p)p^{n-1} + p(1-p)p^{n-1} + (n-1)(1-p)^3 p^{n-2} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{p + p^2 + (n-1)(1-p)^2\} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{np^2 - (2n-3)p + n-1\} \end{aligned}$$

である。



$\circ$ が 1 個増えるごとの 2 状態漸化式にすると、経路の重複が起こらない。

▶ 解法 2 (2 状態の漸化式)

【方針】

$\circ$ が k 個出た直後を、追加の $\times$ が 0 個の状態 A_k と、1 個の状態 B_k に分ける。遷移は $A_{k+1} = pA_k$, $B_{k+1} = pB_k + (1-p)^2 A_k$ である。この 2 状態漸化式を解いて $P_n = A_n + B_n$ を求める。

【解答】

状態の定義

k 個目の $\circ$ が出た直後について、

A_k = 追加の $\times$ がまだ 0 個である確率、

B_k = 追加の $\times$ がちょうど 1 個である確率

とおく。どちらも最後の記号は $\circ$ である。最初の $\times$ から 1 個目の $\circ$ へ移る経路を考えると

$$A_1 = 1-p, \quad B_1 = p(1-p)$$

である。

A_k から追加の $\times$ を出さずに次の $\circ$ へ進む確率は p である。また、 A_k から $\circ$, $\times$, $\circ$ と移って追加の $\times$ を 1 個使う確率は $(1-p)^2$ である。 B_k からは $\times$ をもう出せないで、 $\circ$ を続ける確率 p だけが許される。したがって

$$A_{k+1} = pA_k, \quad B_{k+1} = pB_k + (1-p)^2 A_k$$

を得る。

第 1 式から

$$A_n = (1-p)p^{n-1}$$

である。第 2 式を順に展開すると

$$\begin{aligned} B_n &= p^{n-1} B_1 + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{n-1} p^{n-1-j} A_j \\ &= p^n (1-p) + (n-1)(1-p)^3 p^{n-2}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} P_n &= A_n + B_n = (1-p)p^{n-2}\{p + p^2 + (n-1)(1-p)^2\} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{np^2 - (2n-3)p + n-1\}. \end{aligned}$$

(1) $n = 2$ を代入すると

$$P_2 = (1 - p)(2p^2 - p + 1)$$

である.

(2) $n \geq 3$ では, 上で得た一般式

$$P_n = (1 - p)p^{n-2}\{np^2 - (2n - 3)p + n - 1\}$$

が求める答えである.

【総評】 難度 7, 計算量 6. 目安時間は 24 分. 成功条件を記号列で直接数える問題で, 追加の $\times$ が 0 個か 1 個かという整理が最重要である. 最初に追加の $\times$ が出る場合だけ, 途中で追加の $\times$ が出る場合と確率が違う. 一般式の $(n-1)(1-p)^3p^{n-2}$ は, 位置数と継続回数を両方説明しておくと言得力が出る.

【第 3 問】

O を原点とする座標平面上に, y 軸上の点 $P(0, p)$ と直線 $m: y = (\tan \theta)x$ が与えられている. ここで, $p > 1$,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

とする.

いま, 傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと, 原点 O は直線 $y = 1$ 上の, 第 1 象限の点 Q に移り, y 軸上の点 P は直線 m 上の, 第 1 象限の点 R に移った.

(1) このとき, $\tan \theta$ を α と p で表せ.

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し, そのときの p の値を求めよ.

条件: どのような θ

$$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

に対しても, 原点を通り直線 l に垂直な直線は

$$y = \left(\tan \frac{\theta}{3}\right)x$$

となる.

【方針】

対称軸を $l: y = \alpha x + \beta$ と置き, この直線に関する点 $(0, y)$ の反射公式を求める. 原点の像 Q の y 座標が 1 であることから $\beta = (1 + \alpha^2)/2$ が決まり, さらに Q が第 1 象限にあるので $\alpha < 0$ である. 次に $P(0, p)$ の像 R を出し, R が $y = (\tan \theta)x$ 上にある条件から (1) を得る. (2) では垂線の傾きが $\tan(\theta/3)$ なので $\alpha = -1/t$, $t = \tan(\theta/3)$ とおき, 三倍角公式と恒等的に一致するように p を決める.

【解答】

(1)

対称軸を $l: y = \alpha x + \beta$ とおく. この直線は $\alpha x - y + \beta = 0$ と書ける. 点 $(0, y)$ をこの直線に関して対称移動した点を計算すると

$$\left(\frac{2\alpha(y - \beta)}{1 + \alpha^2}, \frac{(\alpha^2 - 1)y + 2\beta}{1 + \alpha^2}\right)$$

である.

原点 $O = (0, 0)$ の像 Q は直線 $y = 1$ 上にある. したがって, $y = 0$ を代入した像の y 座標から $\frac{2\beta}{1 + \alpha^2} = 1$ を得る. よって $\beta = \frac{1 + \alpha^2}{2}$ である. このとき Q の x 座標は $\frac{2\alpha(0 - \beta)}{1 + \alpha^2} = -\alpha$ である. Q は第 1 象限にあるので $\alpha < 0$ である.

次に $P = (0, p)$ の像 R を求める. 上の式に $y = p$, $\beta = (1 + \alpha^2)/2$ を代入すると

$$R = \left(\frac{\alpha(2p-1-\alpha^2)}{1+\alpha^2}, \frac{\alpha^2 p + \alpha^2 - p + 1}{1+\alpha^2} \right)$$

である。 R は直線 $y = (\tan \theta)x$ 上にあるから、 R の y 座標を x 座標で割って

$$\tan \theta = \frac{\alpha^2 p + \alpha^2 - p + 1}{\alpha(2p-1-\alpha^2)}$$

である。

(2)

原点を通り l に垂直な直線の傾きは $-\frac{1}{\alpha}$ である。条件より $-\frac{1}{\alpha} = \tan \frac{\theta}{3}$ である。そこで $t = \tan \frac{\theta}{3}$ とおく。 $0 < \theta < \pi/2$ より $0 < t < \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、 $\alpha = -\frac{1}{t}$ である。

(1) の式に $\alpha = -1/t$ を代入すると $\tan \theta = \frac{t\{p+1-(p-1)t^2\}}{1-(2p-1)t^2}$ となる。一方、三倍角の公式より

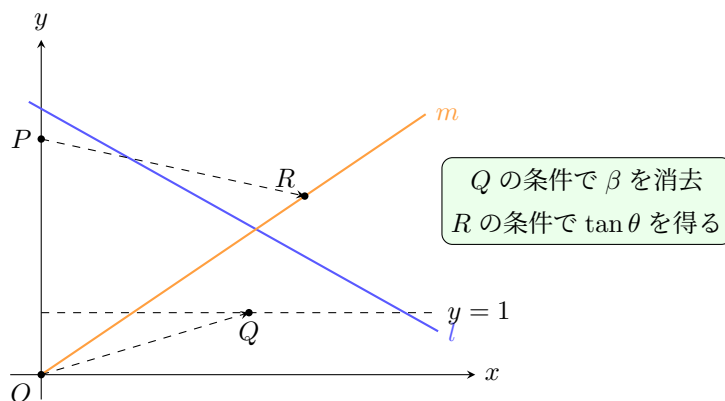
$$\tan \theta = \tan \left(3 \cdot \frac{\theta}{3} \right) = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t(3 - t^2)}{1 - 3t^2}$$

である。

条件はどの θ に対しても成り立つ、すなわちどの $0 < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ に対しても成り立つことである。 $t > 0$ なので t を消し、 $\frac{p+1-(p-1)t^2}{1-(2p-1)t^2} = \frac{3-t^2}{1-3t^2}$ が恒等的に成り立つ必要がある。両辺を交差に掛けると $\{p+1-(p-1)t^2\}(1-3t^2) = (3-t^2)\{1-(2p-1)t^2\}$ である。定数項を比較して $p+1=3$ だから $p=2$ でなければならない。

実際、 $p=2$ とすると $\frac{t\{3-t^2\}}{1-3t^2}$ となり、三倍角の公式の値と一致する。さらに $0 < t < 1/\sqrt{3}$ では $\alpha = -1/t < 0$ であり、 Q は第 1 象限にある。また $p=2$ のとき R の x 座標も正となり、 $\tan \theta > 0$ だから R も第 1 象限にある。

したがって条件を満たす点 P は存在し、その値は $p=2$ である。



【総評】 難度 8, 計算量 7。目安時間は 35 分。対称軸が原点を通るとは限らないため、まず $l: y = \alpha x + \beta$ として反射公式を作る必要がある。 Q の条件で β を消し、 R の条件で $\tan \theta$ を出す流れを崩さないことが大切である。(2) は $t = \tan(\theta/3)$ と置いた後、三倍角公式との恒等式比較で $p=2$ を得る。符号条件 $\alpha < 0$ と第 1 象限条件も最後に確認したい。

【第 4 問】

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える.

条件 (A) : x, y, z は正の整数で,

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

および $x \leq y \leq z$ を満たす.

以下の問いに答えよ.

- (1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で, $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ.
- (2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする. このとき, 組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ.
- (3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は, 無数に存在することを示せ.

【方針】

(1) は $y = 1, 2, 3$ を順に調べる. $x \leq y \leq z$ なので候補は少なく, 2 次方程式の判別式または因数分解で確認できる. (2) は (a, b, c) が解なら, z について $z^2 - bcz + b^2 + c^2 = 0$ を考える. この方程式の一方の解が a であるため, 他方の解 $bc - a$ を取れば $(b, c, bc - a)$ も方程式を満たす. 順序条件と正整数条件を確認し, (3) では $(3, 3, 3)$ からこの操作を繰り返して第 3 成分が真に増えることを示す.

【解答】

(1)

条件 (A) は $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$, $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$, $x \leq y \leq z$ である.

まず $y = 1$ のとき, $x \leq y$ より $x = 1$ である. 方程式は $1 + 1 + z^2 = z$ すなわち $z^2 - z + 2 = 0$ となり, 正の整数解をもたない.

次に $y = 2$ のとき, $x = 1$ または $x = 2$ である. $x = 1$ なら $1 + 4 + z^2 = 2z$ より $z^2 - 2z + 5 = 0$ であり, 解をもたない. $x = 2$ なら $4 + 4 + z^2 = 4z$ より $z^2 - 4z + 8 = 0$ であり, これも解をもたない.

最後に $y = 3$ のとき, $x = 1, 2, 3$ を調べる. $x = 1$ なら $1 + 9 + z^2 = 3z$ より $z^2 - 3z + 10 = 0$ であり, 解をもたない. $x = 2$ なら $4 + 9 + z^2 = 6z$ より $z^2 - 6z + 13 = 0$ であり, 解をもたない. $x = 3$ なら $9 + 9 + z^2 = 9z$ より $z^2 - 9z + 18 = 0$ である. したがって $(z - 3)(z - 6) = 0$ となり, $z \geq 3$ なので $z = 3, 6$ を得る.

よって, $y \leq 3$ を満たす組は $(3, 3, 3), (3, 3, 6)$ である.

(2) (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする. すなわち $a^2 + b^2 + c^2 = abc$, $a \leq b \leq c$ である. z についての 2 次方程式 $z^2 - bcz + b^2 + c^2 = 0$ を考える. $z = a$ を代入すると $a^2 - abc + b^2 + c^2 = 0$ であり, これは条件 (A) の方程式そのものである. したがって a はこの 2 次方程式の解である. もう一方の解を z とすると, 解と係数の関係より $a + z = bc$ だから $z = bc - a$ である. この z は整数である.

この z は同じ 2 次方程式を満たすので $z^2 - bcz + b^2 + c^2 = 0$ であり, すなわち $b^2 + c^2 + z^2 = bcz$ である.

次に順序を確認する. (1) の結果から, 条件 (A) を満たす組では $b \geq 3$ である. もし $b \leq 3$ なら, (1) より (a, b, c) は $(3, 3, 3)$ または $(3, 3, 6)$ であり, いずれも $b = 3$ である. したがって常に $b \geq 3$ である.

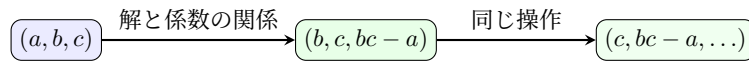
よって $z - c = bc - a - c = c(b - 1) - a$ であり, $b \geq 3, a \leq c$ から $z - c \geq 2c - a \geq c > 0$ である. したがって $b \leq c < z$ であり, z は正の整数である. 以上より $(b, c, z) = (b, c, bc - a)$ は条件 (A) を満たす.

(3)

(1) より $(3, 3, 3)$ は条件 (A) を満たす. さらに (2) より, 条件 (A) を満たす組 (a, b, c) から $(b, c, bc - a)$ という新しい条件 (A) の組を作ることができる.

しかも (2) で示したように, 新しい第 3 成分は $bc - a > c$ を満たす. したがってこの操作を繰り返すと, 第 3 成分は $3 < 6 < \dots$ のように真に増加し, 同じ組に戻ることはない. よって条件 (A) を満たす組は無数に存在する.

したがって 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は無数に存在する ことが示された.



$bc - a > c$: 第 3 成分が真に増加

【総評】 難度 7, 計算量 5。目安時間は 28 分。整数方程式を, 1 つの文字についての 2 次方程式として見直すのが中心である。(2) の $z = bc - a$ は解と係数の関係から自然に出るが, 方程式だけでなく順序 $b \leq c \leq z$ と正整数性を確認しないと条件 (A) の証明にならない。(3) は第 3 成分が真に増えることを明記すれば, 無限個の存在がはっきりする。

【第 5 問】

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

とし, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1 + a_n)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

とおく。 $n > 1$ のとき, $b_n > 2n$ となることを示せ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

(3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$$

【方針】

逆数 $b_n = 1/a_n$ を取ると, 漸化式は $b_{n+1} = b_n + 2 + 1/b_n$ という加法型になる。(1) は増加量が常に 2 より大きいことから示す。(2) は $a_n < 1/(2n)$ を用いて平均を上から評価する。(3) は b_n が $2n$ より大きく, 一方で超過分は調和和程度に抑えられることを示し, $b_n/n \rightarrow 2$ から $na_n \rightarrow 1/2$ を得る。

【解答】

(1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。 $a_1 = 1/2$ なので $b_1 = 2$ である。また $a_{n+1} = \frac{a_n}{(1 + a_n)^2}$ より

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\
 &= \frac{(1 + a_n)^2}{a_n} \\
 &= \frac{1}{a_n} + 2 + a_n \\
 &= b_n + 2 + \frac{1}{b_n}
 \end{aligned}$$

である。 $b_n > 0$ だから $b_{n+1} > b_n + 2$ である。

これを繰り返すと, $n > 1$ に対して $b_n > b_1 + 2(n - 1) = 2n$ である。したがって $b_n > 2n$ ($n > 1$) が示された。

(2)

(1) より, $n > 1$ では $b_n > 2n$ である。 $a_n = 1/b_n$ だから $0 < a_n < \frac{1}{2n}$ ($n > 1$) である。

したがって

$$0 < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} \right)$$

である。ここで

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \log n$$

なので、右辺は $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \log n) \right)$ 以下であり、 $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

である。

(3)

(1) より、 $n > 1$ で $b_n > 2n$ である。したがって $\frac{1}{b_n} < \frac{1}{2n}$ である。漸化式 $b_{n+1} = b_n + 2 + \frac{1}{b_n}$ から、 $n > 1$ では $b_{n+1} < b_n + 2 + \frac{1}{2n}$ となる。 $k = 2, 3, \dots, n-1$ についてこの不等式を足し合わせると、ある定数項を含めて

$$b_n < 2n + C + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

と書ける。例えば $C = b_2 - 4$ としてよい。よって

$$2 < \frac{b_n}{n} < 2 + \frac{C}{n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

である。右端の余分な項は、(2) と同様に調和和が $\log n$ 程度であることから 0 に近づく。したがって

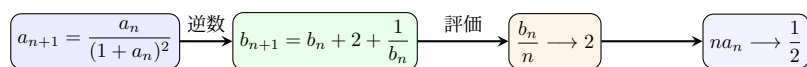
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 2$$

である。

ゆえに $na_n = \frac{n}{b_n} = \frac{1}{b_n/n}$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{1}{2}$$

である。



【総評】 難度 6，計算量 5。目安時間は 24 分。逆数を取ると増加量が $2 + 1/b_n$ になるため、数列の大きさがほぼ $2n$ だと見える。(2) は各項が 0 に近づくだけでは平均の証明として不足で、和を上から評価する必要がある。(3) は $b_n - 2n$ の増え方が調和和程度に抑えられることを示すのが決め手である。

【第 6 問】

$x > 0$ を定義域とする関数

$$f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は、実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。すなわち、任意の実数 a に対して、 $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y = g(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする。このとき、次の定積分を求めよ。

$$\int_8^{27} g(x) dx$$

【方針】

$u = e^x$ とおくと $u > 1$ で、 $f(x)$ は $F(u) = 12(u^3 - 3u)/(u^2 - 1)$ になる。 $F'(u) > 0$, $u \rightarrow 1+0$ で $-\infty$, $u \rightarrow \infty$ で ∞ を示せば、実数全体を値域にもつ単調関数なので逆関数が定義できる。(2) は $f(\log 2) = 8$, $f(\log 3) = 27$ を確認し、逆関数の面積関係で

$$\int_8^{27} g(x) dx$$

を

$$\int_{\log 2}^{\log 3} f(t) dt$$

に変換して計算する。

【解答】

(1) $u = e^x$ とおく。 $x > 0$ なので $u > 1$ である。このとき $f(x) = F(u)$, $F(u) = \frac{12(u^3 - 3u)}{u^2 - 1}$ と書ける。 $F(u)$ を微分すると

$$\begin{aligned} F'(u) &= 12 \cdot \frac{(3u^2 - 3)(u^2 - 1) - 2u(u^3 - 3u)}{(u^2 - 1)^2} \\ &= 12 \cdot \frac{u^4 + 3}{(u^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

である。 $u > 1$ では分母も分子も正なので $F'(u) > 0$ である。したがって $F(u)$ は $u > 1$ で狭義単調増加である。

また、 $u \rightarrow 1+0$ のとき、分母 $u^2 - 1$ は正で 0 に近づき、分子 $12(u^3 - 3u)$ は -24 に近づく。よって

$$\lim_{u \rightarrow 1+0} F(u) = -\infty$$

である。一方、 $u \rightarrow \infty$ のとき $F(u) = 12u \cdot \frac{u^2 - 3}{u^2 - 1} \rightarrow \infty$ である。

したがって $F(u)$ は $(1, \infty)$ 上で連続かつ狭義単調増加で、値域は実数全体である。 $u = e^x$ は $x > 0$ と $u > 1$ を一対一に対応させるので、任意の実数 a に対して $f(x) = a$ を満たす $x > 0$ がただ 1 つ存在する。よって $y = f(x)$ は実数全体を定義域とする逆関数をもつ。

(2)

まず端点に対応する値を確認する。 $u = 2$ のとき $f(\log 2) = \frac{12(8 - 6)}{4 - 1} = 8$ であり、 $u = 3$ のとき $f(\log 3) = \frac{12(27 - 9)}{9 - 1} = 27$ である。したがって逆関数 g について $g(8) = \log 2$, $g(27) = \log 3$ である。

逆関数の面積関係を用いると

$$\int_8^{27} g(x) dx = 27 \log 3 - 8 \log 2 - \int_{\log 2}^{\log 3} f(t) dt$$

である。

残る積分を計算する。 $u = e^t$ とおくと $dt = du/u$ であり,

$$\begin{aligned}\int f(t) dt &= \int \frac{12(u^3 - 3u)}{u^2 - 1} \cdot \frac{du}{u} \\ &= \int 12 \frac{u^2 - 3}{u^2 - 1} du \\ &= \int 12 \left(1 - \frac{2}{u^2 - 1} \right) du\end{aligned}$$

である。ここで $\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}$ だから

$$\int f(t) dt = 12u - 12 \log(u - 1) + 12 \log(u + 1)$$

である。 $u = e^t$ に戻すと

$$\int f(t) dt = 12e^t + 12 \log(e^t + 1) - 12 \log(e^t - 1)$$

である。

よって

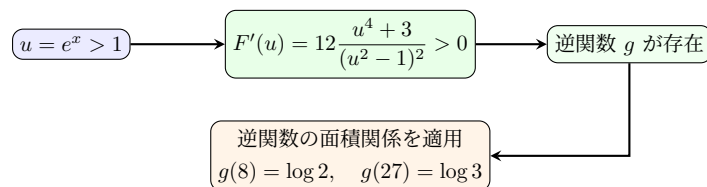
$$\begin{aligned}\int_{\log 2}^{\log 3} f(t) dt &= \{36 + 12 \log 4 - 12 \log 2\} \\ &\quad - \{24 + 12 \log 3 - 12 \log 1\} \\ &= (36 + 12 \log 2) - (24 + 12 \log 3) \\ &= 12 + 12 \log 2 - 12 \log 3\end{aligned}$$

である。

したがって

$$\begin{aligned}\int_8^{27} g(x) dx &= 27 \log 3 - 8 \log 2 - (12 + 12 \log 2 - 12 \log 3) \\ &= 39 \log 3 - 20 \log 2 - 12\end{aligned}$$

である。



【総評】 難度 7, 計算量 6。目安時間は 30 分。 $u = e^x$ と置くと単調性と端の極限が見やすくなり, 逆関数の存在を一気に示せる。逆関数の積分では, 端点 8, 27 がそれぞれ $\log 2, \log 3$ に対応することを先に確認するのが重要である。積分計算は $dt = du/u$ を忘れると式が大きく崩れるので, 置換後の有理式を丁寧に整理したい。