

入 学 試 験 問 題

数 学



東京大学 2007 年度理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面の曲線 $C: xy^2 = 4$ 上に 1 点 $P_0(x_0, y_0)$ ($y_0 > 0$) をとる. P_0 における C の接線と C との共有点のうち, P_0 と異なるものを $P_1(x_1, y_1)$ とする. また P_1 における C の接線と C との共有点のうち, P_1 と異なるものを $P_2(x_2, y_2)$ とする. 次の問に答えよ.

- (1) P_1, P_2 の座標を y_0 を用いて表せ.
- (2) $\triangle P_0P_1P_2$ の面積を T とし, 線分 P_0P_1, P_1P_2 および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする. $\frac{T}{S}$ の値を求めよ.
- (3) $\angle P_0P_1P_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ.
- (4) 前問 (3) で求めた y_0 に対し, $\triangle P_0P_1P_2$ の外接円の面積を求めよ.

第 2 問

次の問に答えよ.

(1) 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) に対し,

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく. 行列 B は $B = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し, $r + t$, $rt - s^2$ を a , b , c を用いて表せ.

(2) 前問 (1) において $r^2 + s^2 \geq a^2 + b^2$ が成り立つことを示せ.

(3) 実数 a_n , b_n , c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める.

$$n = 0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

(ア)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

を示せ.

(イ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

を求めよ.

第 3 問

N を 2 以上の自然数とする. $x_1 \leq \cdots \leq x_N$ をみたす実数 $x_1, \dots, x_N$ に対し, 実数 k_n, p_n, q_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次の手続きで定める.

- (A) $k_0 = 1, p_0 = x_1, q_0 = x_N$
- (B) n が奇数のとき k_n は $x_i \leq \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数, $p_n = p_{n-1}, q_n = q_{n-1}$
- (C) n が偶数 ($n \geq 2$) のとき $k_n = k_{n-1}$,

$$p_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} x_i, \quad q_n = \frac{1}{N - k_n} \sum_{i=k_n+1}^N x_i$$

ただし $k_n = 0$ または $k_n = N$ になったら, その時点で手続きを終了する.

$x_1 < x_N$ であるとき, 次の問に答えよ.

- (1) すべての自然数 n について $1 \leq k_n \leq N - 1$ かつ $x_1 \leq p_n < q_n \leq x_N$ が成り立つことを示せ.
- (2) 実数 J_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を

$$J_n = \sum_{i=1}^{k_n} (x_i - p_n)^2 + \sum_{i=k_n+1}^N (x_i - q_n)^2$$

と定めると, すべての自然数 n に対して $J_n \leq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

- (3) n が十分大きいとき. $J_n = J_{n-1}, p_n = p_{n-1}, q_n = q_{n-1}, k_n = k_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)