

東京大学 2007 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面の曲線 $C: xy^2 = 4$ 上に 1 点 $P_0(x_0, y_0)$ ($y_0 > 0$) をとる. P_0 における C の接線と C との共有点のうち, P_0 と異なるものを $P_1(x_1, y_1)$ とする. また P_1 における C の接線と C との共有点のうち, P_1 と異なるものを $P_2(x_2, y_2)$ とする. 次の問に答えよ.

- (1) P_1, P_2 の座標を y_0 を用いて表せ.
- (2) $\triangle P_0P_1P_2$ の面積を T とし, 線分 P_0P_1, P_1P_2 および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする. $\frac{T}{S}$ の値を求めよ.
- (3) $\angle P_0P_1P_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ.
- (4) 前問 (3) で求めた y_0 に対し, $\triangle P_0P_1P_2$ の外接円の面積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

曲線を y で $x = 4/y^2$ と媒介表示する. 接点の y 座標を a として接線と曲線を連立すると, 接点以外の交点の y 座標は $-a/2$ になる. (2) は三角形を行列式で, 曲線を含む領域を y に関する通常の定積分で求める. (3) は 2 ベクトルの内積, (4) は直角三角形の斜辺を使う.

【解答】

(1) $a = y_0 > 0$ とおく. 曲線上では $x = 4/y^2$ だから

$$P_0 = \left(\frac{4}{a^2}, a \right).$$

$dx/dy = -8/y^3$ より, P_0 における接線の傾きは $dy/dx = -a^3/8$ である. この接線と曲線上の点 $(4/y^2, y)$ を連立すると

$$2y^3 - 3ay^2 + a^3 = 0$$

を得る. 左辺は

$$(y - a)^2(2y + a)$$

と因数分解できるので, 接点以外の交点では $y = -a/2$ である. したがって

$$P_1 = \left(\frac{16}{a^2}, -\frac{a}{2} \right).$$

同じ関係を P_1 に用いると, 次の交点の y 座標は $-(-a/2)/2 = a/4$ だから

$$P_2 = \left(\frac{64}{a^2}, \frac{a}{4} \right).$$

(2)

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \left(-\frac{12}{a^2}, \frac{3a}{2} \right), \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{48}{a^2}, \frac{3a}{4} \right)$$

より

$$T = \frac{1}{2} \left| -\frac{12}{a^2} \cdot \frac{3a}{4} - \frac{3a}{2} \cdot \frac{48}{a^2} \right| = \frac{81}{2a}.$$

直線 P_0P_1 と直線 P_1P_2 をそれぞれ y で表すと

$$x = \frac{12}{a^2} - \frac{8y}{a^3}, \quad x = \frac{48}{a^2} + \frac{64y}{a^3}$$

である。したがって領域を水平に切ると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a/2}^{a/4} \left\{ \frac{48}{a^2} + \frac{64y}{a^3} - \left(\frac{12}{a^2} - \frac{8y}{a^3} \right) \right\} dy \\ &\quad + \int_{a/4}^a \left\{ \frac{4}{y^2} - \left(\frac{12}{a^2} - \frac{8y}{a^3} \right) \right\} dy \\ &= \frac{81}{4a} + \frac{27}{4a} = \frac{27}{a}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{T}{S} = \frac{3}{2}.$$

(3) $\angle P_0P_1P_2$ が直角である条件は、(2) の 2 ベクトルの内積が 0 となることである。よって

$$-\frac{576}{a^4} + \frac{9a^2}{8} = 0, \quad a^6 = 512.$$

$a > 0$ だから

$$y_0 = a = 2\sqrt{2}.$$

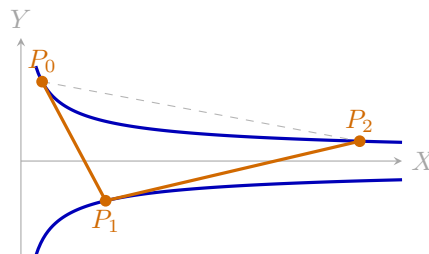
(4) (3) では P_0P_2 が直角三角形の斜辺であり、外接円の直径になる。

$$P_0P_2^2 = \left(\frac{60}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{3a}{4} \right)^2.$$

$a = 2\sqrt{2}$ を代入すると $P_0P_2^2 = 243/4$ である。したがって外接円の半径の二乗は $243/16$ であり、その面積は

$$\frac{243\pi}{16}$$

である。



正規化座標では $P_0 = (1, 1), P_1 = (4, -1/2), P_2 = (16, 1/4)$ と固定される。

▶ 解法 2 (座標を正規化して面積比を固定)

【方針】

$a = y_0$ とし、 $X = a^2x/4, Y = y/a$ で正規化する。曲線は $XY^2 = 1$ 、3 点は $(1, 1), (4, -1/2), (16, 1/4)$ となり、面積比は a によらず固定される。(3)(4) は角を保たない変換なので元の座標へ戻す。

【解答】

(1) $a = y_0 > 0$ とする。接点の y 座標を c とすると、接線と $x = 4/y^2$ の接点以外の交点は $y = -c/2$ となる。したがって

$$P_0 = \left(\frac{4}{a^2}, a \right), \quad P_1 = \left(\frac{16}{a^2}, -\frac{a}{2} \right), \quad P_2 = \left(\frac{64}{a^2}, \frac{a}{4} \right).$$

(2) 正規化座標

$$X = \frac{a^2x}{4}, \quad Y = \frac{y}{a}$$

を用いると、曲線と 3 点は

$$XY^2 = 1, \quad (X, Y) = (1, 1), (4, -1/2), (16, 1/4)$$

になる。三角形の面積は

$$T' = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & 3/2 \\ 12 & 3/4 \end{vmatrix} \right| = \frac{81}{8}.$$

2 本の接線は $X = 3 - 2Y$ 、 $X = 12 + 16Y$ であるから

$$\begin{aligned} S' &= \int_{-1/2}^{1/4} \{(12 + 16Y) - (3 - 2Y)\} dY \\ &\quad + \int_{1/4}^1 \left\{ \frac{1}{Y^2} - (3 - 2Y) \right\} dY \\ &= \frac{81}{16} + \frac{27}{16} = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

元の座標への変換はすべての面積を同じ倍率 $4/a$ にするので

$$\frac{T}{S} = \frac{T'}{S'} = \frac{3}{2}.$$

(3) 角度はこの正規化では保存されないなので元へ戻る。

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \left(-\frac{12}{a^2}, \frac{3a}{2} \right), \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{48}{a^2}, \frac{3a}{4} \right).$$

内積を 0 とすると $a^6 = 512$ であり、

$$y_0 = a = 2\sqrt{2}.$$

(4) このとき P_0P_2 が外接円の直径で、

$$P_0P_2^2 = \left(\frac{60}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{3a}{4} \right)^2 = \frac{243}{4}.$$

よって外接円の面積は

$$\frac{243\pi}{16}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 30 分程度。接線とのもう一つの交点の y 座標が常に接点の $-1/2$ 倍になることを最初に確立すれば、以後の座標は短く出せる。面積 S は曲線の正の枝と折れ線で囲まれるため、 $y = a/4$ で水平断面の右境界が変わる。

【第 2 問】

次の問に答えよ。

- (1) 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) に対し,

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく. 行列 B は $B = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し, $r + t$, $rt - s^2$ を a , b , c を用いて表せ.

- (2) 前問 (1) において $r^2 + s^2 \geq a^2 + b^2$ が成り立つことを示せ.

- (3) 実数 a_n , b_n , c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める.

$$n = 0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

(ア)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

を示せ.

(イ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

を求めよ.

【方針】

(1) は逆行列を求めて積を直接計算する。トレースと行列式に当たる 2 量が保たれる。(2) は $r - a$ を明示して差を平方の形にする。(3) では保存量 $a_n + c_n = 3$, $a_n c_n - b_n^2 = 1$ と、(1) の成分表示から得る $b_n = b_{n-1} / (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2)$ を使う。

【解答】

(1)

$$d = a^2 + b^2, \quad D = ac - b^2$$

とおく。 $d > 0$ であり、直接計算すると

$$B = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a^3 + 2ab^2 + b^2c & bD \\ bD & aD \end{pmatrix}.$$

したがって B は $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形である。また成分を整理すると

$$r + t = a + c, \quad rt - s^2 = ac - b^2.$$

(2) (1) の成分表示から

$$r - a = \frac{b^2(a + c)}{a^2 + b^2}$$

である。一方、 $r + t = a + c$, $rt - s^2 = ac - b^2$ を用いると

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 - (a^2 + b^2) &= (a + c)(r - a) \\ &= \frac{b^2(a + c)^2}{a^2 + b^2} \geq 0. \end{aligned}$$

よって主張が成り立つ。

(3)

(ア) (1) より全ての n で

$$a_n + c_n = a_0 + c_0 = 3, \quad a_n c_n - b_n^2 = a_0 c_0 - b_0^2 = 1$$

である。また (2) から

$$a_n^2 + b_n^2 \geq a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 \geq a_0^2 + b_0^2 = 2.$$

(1) の非対角成分の式と $a_{n-1}c_{n-1} - b_{n-1}^2 = 1$ から

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}$$

である。 $b_0 = 1 > 0$ なので $b_n > 0$ であり、さらに

$$0 < b_n \leq \frac{1}{2} b_{n-1}$$

となる。よって $0 < b_n \leq 2^{-n}$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

(イ) (1) の対角成分から

$$a_n - a_{n-1} = \frac{b_{n-1}^2(a_{n-1} + c_{n-1})}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} = \frac{3b_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} \geq 0.$$

したがって a_n は増加する。また $a_n c_n = 1 + b_n^2 > 0$ かつ $a_n + c_n = 3$ なので $0 < a_n < 3$ であり、 a_n は収束する。その極限を α とすると、 $c_n = 3 - a_n$ と (ア) を保存式へ代入して極限を取ることににより

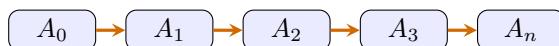
$$\alpha(3 - \alpha) = 1$$

を得る。 $a_n \geq a_0 = 1$ だから

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$



$a_n + c_n = 3, a_n c_n - b_n^2 = 1$ は保存
 $0 < b_n \leq 2^{-n}$ で非対角成分は消える

【総評】 難度 8、計算量 8。想定時間は 35 分程度。変換を毎回展開するのではなく、和 $a + c$ と $ac - b^2$ が保存されることを最初に固定する。(2) は単調量を与え、(3) では分母が常に 2 以上となるため b_n が少なくとも半減する。 a_n の単調性で 2 つの極限候補を選別する。

【第 3 問】

N を 2 以上の自然数とする. $x_1 \leq \cdots \leq x_N$ をみたす実数 $x_1, \dots, x_N$ に対し, 実数 k_n, p_n, q_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次の手続きで定める.

- (A) $k_0 = 1, p_0 = x_1, q_0 = x_N$
 (B) n が奇数のとき k_n は $x_i \leq \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数, $p_n = p_{n-1}, q_n = q_{n-1}$
 (C) n が偶数 ($n \geq 2$) のとき $k_n = k_{n-1}$,

$$p_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} x_i, \quad q_n = \frac{1}{N - k_n} \sum_{i=k_n+1}^N x_i$$

ただし $k_n = 0$ または $k_n = N$ になったら, その時点で手続きを終了する.
 $x_1 < x_N$ であるとき, 次の間に答えよ.

- (1) すべての自然数 n について $1 \leq k_n \leq N - 1$ かつ $x_1 \leq p_n < q_n \leq x_N$ が成り立つことを示せ.
 (2) 実数 J_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を

$$J_n = \sum_{i=1}^{k_n} (x_i - p_n)^2 + \sum_{i=k_n+1}^N (x_i - q_n)^2$$

と定めると, すべての自然数 n に対して $J_n \leq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

- (3) n が十分大きいとき, $J_n = J_{n-1}, p_n = p_{n-1}, q_n = q_{n-1}, k_n = k_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

【方針】

(1) は奇数段階の midpoint 分割と、偶数段階の各群の平均について帰納的に示す。(2) は奇数段階では各 x_i を近い中心へ割り当てる操作、偶数段階では固定した群に対する平方和を平均値で最小化する操作と見る。(3) は偶数段階の状態が分割位置 k だけで決まり、その候補が有限個しかないことを使う。

【解答】

(1) $n = 0$ では仮定から

$$1 \leq k_0 = 1 \leq N - 1, \quad x_1 = p_0 < q_0 = x_N$$

である。以下、1 つ前の段階で主張が成り立つとする。

n が奇数のとき、 $m = (p_{n-1} + q_{n-1})/2$ とおく。 $p_{n-1} < q_{n-1}$ より

$$x_1 \leq p_{n-1} < m < q_{n-1} \leq x_N.$$

したがって $x_i \leq m$ を満たすものも、満たさないものも少なくとも 1 個あり

$$1 \leq k_n \leq N - 1$$

である。 p_n, q_n は変化しないので、残りの不等式も保たれる。

n が偶数のとき、 $1 \leq k_n \leq N - 1$ はそのままである。平均値の性質と大小順から

$$x_1 \leq p_n \leq x_{k_n} \leq x_{k_n+1} \leq q_n \leq x_N.$$

もし $p_n = q_n$ なら、この不等式は全て等号となり $x_1 = x_N$ になってしまう。よって $p_n < q_n$ である。以上から帰納的に主張が成り立ち、手続きは途中で終了しない。

(2) まず n が奇数とする。 $p_n = p_{n-1} = p, q_n = q_{n-1} = q$ で $p < q$ である。このとき

$$(x - p)^2 \leq (x - q)^2 \iff x \leq \frac{p + q}{2}.$$

したがって新しい k_n は、各 x_i を p, q のうち距離の近い方へ割り当てた結果である。各項ごとに二乗距離は増えないので $J_n \leq J_{n-1}$ である。

次に n が偶数とする。実数 $z_1, \dots, z_h$ の平均を $\bar{z}$ とすれば、任意の実数 c に対して

$$\sum_{i=1}^h (z_i - c)^2 = \sum_{i=1}^h (z_i - \bar{z})^2 + h(c - \bar{z})^2$$

である。したがって二乗偏差の和は $c = \bar{z}$ のとき最小となる。偶数段階では分割位置 $k_n = k_{n-1}$ を変えず、前半と後半の中心をそれぞれの平均 p_n, q_n に更新するので、やはり $J_n \leq J_{n-1}$ である。

(3) $n \geq 2$ が偶数のとき、 p_n, q_n は k_n によって

$$p_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} x_i, \quad q_n = \frac{1}{N - k_n} \sum_{i=k_n+1}^N x_i$$

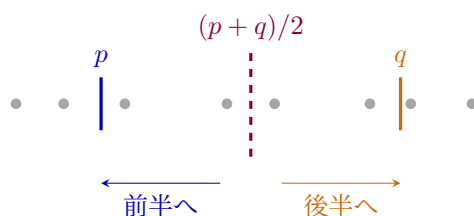
と一意に定まる。 k_n の候補は $1, 2, \dots, N-1$ の有限個だから、偶数段階の状態 (k_n, p_n, q_n, J_n) も有限個しかない。

さらに、ある偶数段階から次の偶数段階までに分割位置が変われば、(2) の 2 回の不等式の少なくとも一方は厳密になる。実際、奇数段階で距離が厳密に小さい群へ移る点があれば、その段階で J は減る。等距離の点だけが後半から前半へ移る場合でも、その値は $(p+q)/2$ であって p とは異なるため、次の偶数段階で前半の平均を取り直すと二乗偏差の和が厳密に減る。したがって状態が変わる限り、偶数番目の J_n は厳密に減少する。

有限個の状態の間を厳密に減少し続けることはできない。よって十分大きい偶数 n からは分割位置が変わらず、平均も変わらない。その間の奇数段階でも中点による再分類は同じ分割を返す。したがって十分大きい全ての n について

$$J_n = J_{n-1}, \quad p_n = p_{n-1}, \quad q_n = q_{n-1}, \quad k_n = k_{n-1}$$

が成り立つ。



奇数段階は中点で再分類し、偶数段階は各群の平均へ中心を更新する。

【総評】 難度 9、計算量 7。想定時間は 40 分程度。この手続きは「近い中心への再分類」と「各群の平均への中心更新」を交互に行う。前者は各点ごと、後者は平方完成で評価すると J_n の単調性が見える。収束だけでなく有限回で停止する理由は、偶数段階の状態が $N-1$ 個の分割候補に限られることにある。